# <u>אלגברה ב3</u>

© ארזים

10 בנובמבר 2016

## 1 מודולים

נמשיך להתעסק מעט עם מודולים באופן כללי.

**הגדרה 1.1** יהי $M$ מודול מעל $R$. יהי $U \subseteq M$ תת מודול. נתובנן באידאל הבא:

$$\mathrm{Ann}_R(U) = \{r \in R \mid rU = 0\}$$

אידאל זה נקרא <u>המאפס</u> של $U$ בתוך $R$. זהו כמובן אידאל של $R$.

**דוגמא** יהי $V$ מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T : V \to V$ העתקה לינארית מעל $\mathbb{F}$. ראינו כי $T$ מגדירה על $V$ מבנה של מודול מעל $\mathbb{F}[x]$ לפי

$$f(x) \cdot v = f(T)(v)$$

כעת, נתבונן באידאל

$$\mathrm{Ann}_{\mathbb{F}[x]}(V) = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid f(T) = 0\} = \mathbb{F}[x] \cdot m_T(x)$$

כאשר $m_T(x)$ הוא הפולינום המינימלי של $T$.

אם $I \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$ אידאל, אז $M$ הוא מודול גם מעל $R/I$ לפי

$$(r + I) \cdot v = rv$$

קל לראות כי

$$\mathrm{Ann}_{R/I}(M) = \mathrm{Ann}_R(M)/I$$

שכן

$$(r + I) \cdot M \iff r \cdot M = 0$$

**הגדרה 1.2** נאמר כי $M$ <u>מודול נאמן</u> מעל $R$ אם מתקיים $\mathrm{Ann}_R(M) = 0$.

### 1.1 מודולים נוצרים סופית

**הגדרה 1.3** יהי $M$ מודול מעל $R$, ותהי $S \subseteq M$. תת המודול הקטן ביותר של $M$ שמכיל את $S$ הוא

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i s_i \mid n \geq 1, \{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq S, a_i \in R \right\} = \sum_{s \in S} Rs$$

נקרא לו תת המודול <u>הנוצר</u> על ידי $S$. אם תת המודול הנוצר על ידי $S$ הוא $M$, נאמר כי $M$ <u>נוצר</u> על ידי $S$, ואם $S$ סופית, נאמר כי $M$ <u>נוצר סופית</u>.

**הגדרה 1.4** תהי $\{M_i\}_{i=1}^{k}$ קבוצה של תת מודולים של $M$. נאמר שהסכום

$$\sum_{i=1}^{k} M_i$$

הוא <u>סכום ישר</u> אם הוא סכום ישר כתת חבורות חיבוריות, כלומר (הבאים שקולים):

1. $\sum v_i = 0$, כאשר $v_i \in M_i$, אם ורק אם $v_i = 0$ לכל $i$.
2. לכל $i$ מתקיים

$$M_i \cap \sum_{i \neq j=1}^{k} M_j = 0$$

במקרה זה נסמן

$$\sum_{i=1}^{k} M_i = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$$

וכן מתקיים

$$\bigoplus_{i=1}^{k} M_i \cong \prod_{i=1}^{k} M_i$$

על ידי

$$\sum_{i=1}^{k} v_i \mapsto (v_1, \ldots, v_k)$$

**הגדרה 1.5** נניח כי $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ קבוצה של מודולים שאינם מודול האפס מעל $R$. נגדיר את <u>הסכום הישר</u> של המודולים על ידי

$$\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha = \left\{(v_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} M_\alpha \mid \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq A. \forall\alpha \notin \{\alpha_i\}_{i=1}^n \quad v_\alpha = 0\right\} \subseteq \prod_{\alpha\in A} M_\alpha$$

נוח לזהות את $M_\alpha$, לכל $\alpha$, כתת מודול על ידי כך שנתאים לכל $v_\alpha \in M_\alpha$ את $(u_\beta)_{\beta\in A}$, כאשר

$$u_\beta = \begin{cases} v_\alpha & \beta = \alpha \\ 0 & \beta \neq \alpha \end{cases}$$

כך נוכל לרשום כל $(v_\alpha) \in \bigoplus M_\alpha$ בצורה $\sum v_\alpha$.

**למה 1.6** נניח כי הסכום הישר $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ נוצר סופית. אזי בהכרח $A$ סופית.

**הוכחה:** תהי $v^1, \ldots, v^k$ קבוצת יוצרים של הסכום הישר. אזי לכל $1 \le i \le k$, כשכותבים $v^i = \left(v^i_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ אזי $v^i_\alpha = 0$, כמעט לכל $\alpha \in A$. נסמן

$$A' = \bigcup_{i=1}^{k} \left\{\alpha \in A \mid v^i_\alpha \neq 0\right\}$$

וכמובן שזו קבוצה סופית (איחוד סופי של קבוצות סופיות). ברור כי

$$\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in A'} M_\alpha$$

וזה מחייב $A = A'$, ולכן $A$ סופית. ■

**הגדרה 1.7** מודול $M$ ייקרא <u>מודול חופשי</u> מעל $R$ אם

$$M \cong \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$$

כאשר לכל $\alpha \in A$ מתקיים $M_\alpha \cong R$.
אם $M$ גם נוצר סופית, אזי $A$ סופית, ונסמן $|A| = n$. נקבל

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} R = R^n$$

**טענה 1.8** $M$ הוא מודול נוצר סופית אם ורק אם $M$ הוא מנה של $R^n$ עבור $n$ טבעי כלשהו.

**הוכחה:** אם $M$ נוצר סופית, אזי

$$M=\sum_{i=1}^{n}Rv_i$$

כעת, נגדיר

$$f:R^n\to M$$

לפי

$$f\left(r_1,\ldots,r_n\right)=\sum_{i=1}^{n}r_iv_i$$

זהו אפימורפיזם של מודולים. לכן

$$R^n\big/\ker f\cong M$$

אם $M$ מודול מנה של $R^n$, אז קיים תת מודול $U\subseteq R^n$ עבורו $M\cong R^n\big/U$. כעת, נרכיב עם ההומומורפיזם הטבעי $\pi:R^n\to R^n\big/U$ עם האיזומורפיזם הזה, ונסמן את ההרכבה בתור $f$. אזי $f:R^n\to M$ אפימורפיזם. נסמן בתור $e_i$ את הווקטור בו כל קואורדינטה היא $0$, פרט לקואורדינטה $i$, שהיא $1$. אזי מתקיים בהכרח

$$M=\sum_{i=1}^{n}Rf\left(e_i\right)$$

שכן

$$\sum_{i=1}^{n}r_if\left(e_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}r_ie_i\right)=f\left(r_1,\ldots,r_n\right)$$

■

יהי $M$ מודול מעל $R$. יהי $f\in\operatorname{End}_R\left(M\right)$. ראינו כי $M$ מודול מעל $R\left[f\right]$. לכל $n$ טבעי, נתבונן בסכום הישר

$$\bigoplus_{i=1}^{n}M=M^n$$

זהו מודול מעל $M_n\left(R\left[f\right]\right)$ בצורה הבאה: לכל $\left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}=A\in M_n\left(R\left[f\right]\right)$ ולכל $v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\in M^n$ נגדיר

$$A\left(v\right)=\begin{pmatrix}\vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{i,j}v_j\\ \vdots\end{pmatrix}$$

ניזכר כי

$$M_n\left(R\left[f\right]\right)^{\times}=\left\{A\mid\det A\in R\left[f\right]^{\times}\right\}$$