אלגברה ב3

© ארזים

7 בנובמבר 2016

הגדרה 0.1 נגדיר את רדיקאל יעקובסון של החוג R, $J(R)$, בתור חיתוך כל האידאלים המקסימליים של R. כמובן, הרדיקל הנילי מוכל ברדיקל יעקובסון - כל רדיקל מקסימלי הוא ראשוני.

טענה 0.2 $x \in J(R)$ אם ורק אם לכל $y \in R$ מתקיים $1 - xy \in R^*$.

הוכחה: נניח כי $x \in J(R)$. בשלילה, אם יש y עבורו $1 - xy$ אינו הפיך, אזי יש I אידאל מקסימלי עבורו $1 - xy \in I$. כיוון שמתקיים $x \in J(R) \subseteq I$, גם $xy \in I$. נקבל כי $1 \in I$ - בסתירה, כי $I \neq R$.
כעת, נניח כי $1 - xy \in R^*$ לכל $y \in R$. בשלילה, אם $x \notin J(R)$, אז יש אידאל מקסימלי I עבורו $x \notin I$. כעת $I + Rx = R$. נכתוב $1 = u + rx$ כאשר $u \in I$, ואז $u = 1 - rx \in R^*$, ואז $u \in R^* \cap I$ - בסתירה, כי $I \neq R$. ■

הגדרה 0.3 חוג R ייקרא מקומי אם יש לו אידאל מקסימלי יחיד.

יהי p מספר ראשוני.

$$Z_p = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n \right\}$$

זהו חוג ביחס לפעולות $\mathbb{Q}$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} Z_p^* &= \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n, m \right\} \\ Z_p \backslash Z_p^* &= \left\{ \frac{pm}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n \right\} = Z_p \cdot p \end{aligned}$$

נסיים את הדוגמה בעזרת טענה כללית יותר.

טענה 0.4 נתון חוג R.

1. נניח כי $P \subseteq R$ אידאל כאשר $P = R \backslash R^*$. אזי R חוג מקומי שבו P האידאל המקסימלי היחיד.
2. נניח כי R חוג מקומי, עם אידאל מקסימלי יחיד P. אזי $P = R \backslash R^*$.

3. נניח כי $P \subseteq R$ אידאל מקסימלי כך שמתקיים $1+P \subseteq R^*$. אזי R חוג מקומי שבו P האידאל המקסימלי היחיד.
4. נניח כי R חוג מקומי, עם אידאל מקסימלי יחיד P. אזי $1+P \subseteq R^*$.

הוכחה:

1. יהי $I \subsetneq R$ אידאל. לכן $I \subseteq R \backslash R^* = P$. לכן P מכיל את כל האידאלים $I \subsetneq R$, ולכן P הוא אידאל מקסימלי יחיד.
2. נניח כי $a \in R \backslash R^*$. לכן a שייך לאידאל מקסימלי כלשהו של R. כלומר $a \in P$. לכן $R \backslash R^* \subseteq P$. ההכלה השנייה נכונה תמיד לכל אידאל שאינו כל R, וזה המצב. לכן $R \backslash R^* = P$.
3. נניח כי $a \in R \backslash R^*$. נניח בשלילה כי $a \notin P$, אזי $P + Ra = R$. נכתוב $1 = u + ra$, עבור $u \in P$. נקבל כי $ra = 1 - u \in P \subseteq R^*$. נסיק כי a הפיך, אבל a אינו הפיך, בסתירה. לכן $R \backslash R^* \subseteq P$. לכן $R \backslash R^* = P$.
4. מתקיים $J(R) = P$. יהי $x \in P$. מהטענה הקודמת שראינו, נוכל לכתוב $1 + x = 1 - x(-1) \in R^*$. לכן $1 + P \subseteq R^*$.

■

1 מודולים

1.1 מושגים ראשונים

הגדרה 1.1 יהי R חוג. מודול M מעל R הוא חבורה חילופית (שתיכתב בסימון חיבורי), יחד עם פונקציה $R \times M \to M$ הממפה $(r,v) \mapsto r \cdot v$ כך שהתכונות הבאות מתקיימות:

1.

$$\forall x,y \in R, u \in M \quad (xy)\,u = x\,(yu)$$

2.

$$\forall u \in M \;\; 1 \cdot u = u$$

3.

$$\forall x,y \in R, u \in M \quad (x+y) \cdot u = xu + yu$$

4.

$$\forall x \in R, u,v \in M \;\; x\,(u+v) = xu + xv$$

הערה 1.2 מההגדרה נובע כי

$$\begin{aligned}\forall u &\in M \;\; 0\cdot u=0\\ \forall x &\in R \;\; x\cdot 0=0\\ \forall x &\in R, u\in M \;\; (-x)\cdot u = x\cdot(-u) = -x\cdot u\end{aligned}$$

דוגמאות

1. מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא מודול מעליו.
2. כל חבורה חילופית G היא מודול מעל $\mathbb{Z}$. נגדיר את הכפל בסקלר: לכל $g\in G$:

$$\begin{aligned}0\cdot g &= 0\\ n\cdot g &= g\cdot((n-1)\cdot g), n>0\\ -n\cdot g &= -((-n)\cdot g)\end{aligned}$$

3. יהי V מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית מעל $\mathbb{F}$. T מגדירה מבנה של מודול מעל $\mathbb{F}[x]$, לפי

$$f(x)\cdot v = f(T)(v)$$

למעשה, כל מודול V מעל $\mathbb{F}[x]$ נראה כך. בפרט, כל מודול כזה הוא מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{F}$, כאשר משכנים את $\mathbb{F}$ בתוך $\mathbb{F}[x]$. נגדיר $T:V\to V$ על ידי

$$T(v)=x\cdot v$$

T כמובן לינארית מעל $\mathbb{F}$:

$$\begin{aligned}T(u+v) &= x(u+v)=xu+xv=T(u)+T(v)\\ T(\lambda u) &= x(\lambda u)=(\lambda x)u=\lambda(xu)=\lambda T(v)\end{aligned}$$

כמו כן,

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\cdot v = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i(v)$$

הגדרה 1.3 יהיו M,N מודולים מעל R. <u>הומומורפיזם</u> $f:M\to N$ מעל R הוא הומומורפיזם של החבורות החילופיות, כך שמתקיים

$$\forall r\in R, u\in M \;\; f(ru)=rf(u)$$

נסמן את אוסף ההומומורפיזמים מהמודול M למודול N על ידי $\mathrm{Hom}_R(M,N)$. לקבוצה זו יש מבנה של מודול מעל R:

$$\begin{aligned} \forall f_1,f_2 &\in \mathrm{Hom}_R(M,N), u\in M, r\in R \\ (f_1+f_2)(u) &= f_1(u)+f_2(u) \\ (r\cdot f_1)(u) &= r\cdot f_1(u) \end{aligned}$$

כאשר $M=N$, פעולת ההרכבה הופכת את $\mathrm{Hom}_R(M,M)=\mathrm{End}_R(M)$ לחוג (לא חילופי).

נתבונן בחוג החלקי

$$R[f]=\left\{\sum_{i=0}^{n} a_i f^i \mid a_i\in R, n\ge 0\right\}$$

זהו חוג חלקי וקומוטטיבי.

M הוא גם מודול מעל $R[f]$:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i f^i\right)u=\sum_{i=0}^{n} a_i f^i(u)$$

M הוא מודול מעל החוג הלא חילופי $\mathrm{End}_R(M)$ גם כן, על ידי

$$f\cdot u=f(u)$$

כעת, נניח כי

$$\begin{aligned} \varphi: N &\to N' \\ \xi: M' &\to M \end{aligned}$$

הומומורפיזמים של מודולים מעל R. נגדיר

$$\begin{aligned} \varphi_*:\mathrm{Hom}_R(M,N) &\to \mathrm{Hom}_R(M,N') \\ \varphi_*(f) &= \varphi\circ f \\ \xi^*:\mathrm{Hom}_R(M,N) &\to \mathrm{Hom}_R(M',N) \\ \xi^*(f) &= f\circ\xi \end{aligned}$$

אלה הם הומומורפיזמים מעל R. נוכיח עבור אחד מהם: יהיו $u\in M, r\in R, f_1,f_2\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. אזי

$$\begin{aligned} \varphi_*(f_1+f_2)(u) &= (\varphi(f_1+f_2))(u)=\varphi((f_1+f_2)(u))=\varphi(f_1(u)+f_2(u))= \\ &= \varphi(f_1(u))+\varphi(f_2(u))=\varphi_*(f_1)(u)+\varphi_*(f_2)(u)= \\ &= (\varphi_*(f_1)+\varphi_*(f_2))(u) \\ \varphi_*(r\cdot f)(u) &= (\varphi(r\cdot f))(u)=\varphi((rf)(u))=\varphi(rf(u))=r\varphi(f(u))=(r\varphi_*(f))(u) \end{aligned}$$

טענה 1.4 יהיו הומומורפיזמים של מודולים

$$\begin{aligned}\varphi_1 : N &\to N', \varphi_2 : N' \to N'' \\ \xi_1 : M' &\to M, \xi_2 : M'' \to M'\end{aligned}$$

אזי מתקיים:

.1

$$\left(\varphi_2 \circ \varphi_1\right)_* = \left(\varphi_2\right)_* \circ \left(\varphi_1\right)_*, \mathrm{Hom}_R\left(M, N\right) \to \mathrm{Hom}_R\left(M, N''\right)$$

.2

$$\left(\xi_1 \circ \xi_2\right)^* = \xi_2^* \circ \xi_1^*, \mathrm{Hom}_R\left(M, N\right) \to \mathrm{Hom}_R\left(M'', N\right)$$

הוכחה: ההוכחות דומות מאוד. נראה את הסעיף השני. יהי $f \in \mathrm{Hom}_R\left(M, N\right)$, אזי

$$\left(\xi_1 \circ \xi_2\right)^*(f) = f\circ(\xi_1 \circ \xi_2) = (f \circ \xi_1)\circ\xi_2 = \xi_1^*(f)\circ\xi_2 = \xi_2^*\left(\xi_1^*(f)\right) = \left(\xi_2^* \circ \xi_1^*\right)(f)$$

■

הגדרה 1.5 יהי M מודול מעל החוג R. תת קבוצה לא ריקה של M $U \subseteq M$ תקרא <u>תת מודול</u> אם U מודול מעל R ביחס לפעולות M כמודול מעל R.

הערה 1.6 בבירור, כמו במרחבים ווקטורים, $U \subseteq M$ תת מודול אם ורק אם U סגורה ביחס לחיבור וביחס לכפל באיברי R.

דוגמא R הוא כמובן מודול מעל עצמו ביחס לפעולות החוג, ואז תת המודולים של R מעל עצמו הם האידאלים של החוג.

נניח כי $U \subseteq M$ תת מודול. נתבונן בחבורת המנה M/U, ועליה יש מבנה של מודול מעל R, לפי

$$r\left(v + U\right) = rv + U$$

ההגדרה טובה כי אם $v+U = v'+U$, אזי $v-v' \in U$, ולכן $r\left(v - v'\right) = rv-rv' \in U$, ולכן $rv + U = rv' + U$.

כמובן שיש לנו את ההומומורפיזם הטבעי $f : M \to M/U$, המוגדר $f\left(v\right) = v + U$. זהו בבירור גם הומומורפיזם של מודולים מעל R, וכמובן שמתקיים $\ker f = U$.

באופן כללי אם $f \in \mathrm{Hom}_R\left(M, N\right)$, אזי $\ker f \subseteq M$ תת מודול, וכן $\mathrm{Im} f \subseteq N$ תת מודול.

כמו כן מתקיים

$$M/\ker\left(f\right) \cong \mathrm{Im}\left(f\right)$$

על ידי

$$v + \ker = f(v)$$

את זה אנחנו יודעים ברמת החבורות (משפט האיזומורפיזם הראשון), אבל ברור כי ההגדרה נותנת למעשה הומומורפיזם של מודולים. באופן כללי יש לנו את המשפטים הבאים, שמגיעים מחבורות.

משפט 1.7 (משפט ההתאמה) יהי $f \in \mathrm{Hom}_f(M, N)$. יש התאמה חד־חד־ערכית ועל בין תתי מודולים U עבורם $\ker f \subseteq U \subseteq M$, לבין תתי מודולים V של התמונה, על ידי

$$\begin{array}{rcl} U & \mapsto & f(U) \\ V & \mapsto & f^{-1}(V) \end{array}$$

ומתקיים עבור $\ker f \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq M$

$$\begin{array}{rcl} U_2/U_1 & \cong & f(U_2)/f(U_1) \\ u_2 + U_1 & \mapsto & f(u_2) + f(U_1) \end{array}$$

מקרה פרטי נניח כי $L \subseteq M$ תת מודול, ובהומומורפיזם המנה:

$$\begin{array}{rcl} f : M & \to & M/L \\ f(v) & = & v + L \end{array}$$

כל מודול של M/L הוא מהצורה U/L עבור $L \subseteq U \subseteq M$ תת מודול. U נקבע באופן יחיד, וכן אם $L \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq M$, אזי

$$U_2/U_1 \cong (U_2/L)\,/\,(U_1/L)$$

על ידי

$$u_2 + U_1 \to (u_2 + L) + U_1/L$$

משפט 1.8 (האיזומורפיזם השני) נניח כי $U, V \subseteq M$ תת מודולים. נגדיר

$$U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

זהו תת מודול של M, שבו U תת מודול, ואז מתקיים

$$\left(U+V\right)/U\cong V/\left(U\cap V\right)$$

על ידי

$$\left(u+v\right)+U\mapsto v+\left(U\cap V\right)$$

באופן כללי, לקבוצה $\left\{ M_{\alpha}\right\} _{\alpha\in A}$ של תת מודולים של M נגדיר

$$\sum_{\alpha\in A}M_{\alpha}=\left\{ \sum_{i=1}^{n}v_{\alpha_{i}}\mid n\in\mathbb{N},\left\{ \alpha_{1},\ldots,\alpha_{n}\right\} \subseteq A,v_{\alpha_{i}}\in M_{\alpha_{i}}\right\}$$

זהו תת מודול של M שנקרא הסכום של $\left\{ M_{\alpha}\right\} _{\alpha\in A}$.
אם $I\subseteq R$ אידאל, M מודול מעל R, נגדיר

$$I\cdot M=\left\{ \sum_{i=1}^{n}a_{k}\cdot v_{k}\mid n\in\mathbb{N},a_{k}\in I,v_{k}\in M\right\}$$

זהו תת מודול של M, וכמו כן M/IM מודול מעל R/I על ידי

$$\left(r+I\right)\left(v+IM\right)=rv+IM$$

וזה מוגדר היטב.