אלגברה ב3

ארזים ©

26 בינואר 2017

1 גיאומטריה אלגברית

תהי $X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית אי פריקה. אזי $F[X]$ אי פריקה, וסימנו $F(X)$ את שדה המנות. בהינתן $U \subseteq X$ פתוחה, הגדרנו

$$O_X(U) = \bigcap_{z \in U} O_z$$
$$O_z = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in F[x], g(z) \neq 0 \right\}$$

ראינו גם את ההעתקה

$$\alpha \in O_X(U) \mapsto (z \in U \mapsto \alpha(z))$$

טענה 1.1 תהי $\alpha \in O_X(U)$ כך שלכל $z \in U$ מתקיים $\alpha(z) = 0$. אזי $\alpha = 0$.

הוכחה: נניח כי $\alpha \neq 0$. תהי $z_0 \in U$ ונכתוב $\alpha = \frac{f}{g}$, $f, g \in F[X]$, $g(z_0) \neq 0$. מתקיים $f \neq 0$, אבל $f(z_0) = 0$. ראינו כי $f(z)$ אינו זהותית אפס כאשר $z \in U$. תהי $z_0 \neq u_0 \in U$, כאשר $f(u_0) \neq 0$. נכתוב $\alpha = \frac{f'}{g'}$
כאשר $g'(u_0) \neq 0$. כמובן, $f'(u_0) = 0$. לכן נקבל

$$fg' = f'g$$

לכן נקבל

$$0 \neq f(u_0) g'(u_0) = f'(u_0) g(u_0) = 0$$

וזו סתירה. ■

כעת, נניח כי $U \subseteq V \subseteq X$. אזי

$$O_X(V) \subseteq O_X(U)$$

בהינתן $\alpha \in O_X(V)$, התמונה של α בתוך $O_X(U)$ היא $\alpha|_U$. נסמן

$$\alpha|_U = r_{V,U}(\alpha)$$

ההכלה שלמעלה, לאחר הרכבה עם הזיהויים כפונקציות שראינו על V ועל U, הופכת להומומורפיזם הצמצום. כאן, $r_{V,U}$ חד־חד־ערכית.
ברור כי

$$r_{U,U} = \mathrm{Id}_U$$

וכן כי אם $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq X$ אזי

$$r_{U_2,U_1} \circ r_{U_3,U_2} = r_{U_3,U_1}$$

הגדרה 1.2 עבור $f \in F[X]$, נגדיר

$$D_X(f) = X \backslash V_X(f) = \{a \in X \mid f(a) \neq 0\}$$

קבוצה כזו נקראת קבוצה פתוחה ראשית.

ברור כי:

$$D_X(1) = X, D_X(0) = \emptyset$$

$$\begin{aligned} D_X(fg) &= D_X(f) \cap D_X(g) \\ D_X\left(f^k\right) &= D_X(f) \end{aligned}$$

טענה 1.3 תהי $U \subseteq X$ פתוחה. אזי U היא איחוד סופי של קבוצות פתוחות ראשיות.

הוכחה: תהי $Y = X \backslash U$ ־ סגורה. ראינו כי $Y = V_X(I)$, כאשר $I \subseteq F[X]$ אידאל (רדיקלי). I נוצר סופית:

$$I = \sum_{i=1}^{l} F[X] f_i$$

לכן

$$V_X(I)=\bigcap_{i=1}^{l}V_X(f_i)$$
$$U=X\backslash V_X(I)=\bigcup_{i=1}^{l}(X\backslash V_X(f_i))=\bigcup_{i=1}^{l}D_X(f_i)$$

■

טענה 1.4 תהי $\alpha\in O_X(U)$. לכל $z_0\in U$, יש $f,g\in F[X]$ כך שמתקיים $g(z_0)\neq 0$, וכן לכל $z\in V=U\cap D_X(g)$,

$$\alpha(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$$

הוכחה: נכתוב $\alpha=\frac{f}{g}$, כאשר $f,g\in F[x]$, $g(z_0)\neq 0$. כיוון שמתקיים $g(z)\neq 0$, לכל $z\in V$,

$$\alpha(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$$

■

טענה 1.5 נניח כי

$$U=\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha$$

כיסוי פתוח של $U\subseteq X$. נניח כי לכל $\alpha\in A$ נתונה $f_\alpha\in O_X(U_\alpha)$ כך שלכל $\alpha,\beta\in A$ מתקיים

$$f_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta}=f_\beta|_{U_\beta\cap U_\alpha}$$

אזי יש $f\in O_X(U)$ יחיד כך שמתקיים

$$f|_{U_\alpha}=f_\alpha$$

לכל $\alpha\in A$.

הוכחה: בהינתן $\alpha,\beta\in A$ נבחר $z_{\alpha,\beta}\in U_\alpha\cap U_\beta$ ונכתוב

$$f_\alpha=\frac{a_\alpha}{b_\alpha},f_\beta=\frac{a_\beta}{b_\beta}$$

כאשר $a_\alpha, b_\alpha, a_\beta, b_\beta \in F[X]$, וכן $b_\alpha(z_{\alpha,\beta}), b_\beta(z_{\alpha,\beta}) \neq 0$. לפי הטענה הקודמת, נקבל

$$\frac{a_\alpha(z)}{b_\alpha(z)} = \frac{a_\beta(z)}{b_\beta(z)}$$

לכל $X_{\alpha,\beta} =: U_\alpha \cap U_\beta \cap D_X(b_\alpha) \cap D_X(b_\beta) \ni z$. לכן הפונקציה

$$\frac{a_\alpha}{b_\alpha} - \frac{\alpha_\beta}{b_\beta}$$

מתאפסת על הקבוצה הפתוחה $X_{\alpha,\beta}$. לכן נקבל כי $\frac{a_\alpha}{b_\alpha} = \frac{a_\beta}{b_\beta}$ כאיברים בתוך $F(X)$, כלומר

$$a_\alpha b_\beta = a_\beta b_\alpha$$

נקבע שרירותית $\alpha_0 \in A$, ונגדיר $f = \frac{a_{\alpha_0}}{b_{\alpha_0}} \in F(X)$ לפי איזשהו ייצוג של f_{α_0}. יהי $\alpha \in A$, ותהי $z \in U_\alpha$. נכתוב

$$f_\alpha = \frac{a_\alpha}{b_\alpha}$$

כאשר $b_\alpha(z) \neq 0$. לפי מה שראינו,

$$\frac{a_{\alpha_0}}{b_{\alpha_0}} = \frac{a_\alpha}{b_\alpha} \in F(X)$$

לכן לפי ההגדרה

$$f(z) = \frac{a_\alpha(z)}{b_\alpha(z)} = f_\alpha(Z)$$

ולכן $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$. ■

לסיכום, ראינו שבהינתן $U \subseteq V$ קבוצות פתוחות יש לנו הומומורפיזם

$$r_{V,U} : O_X(V) \to O_X(U)$$

ומתקיימות התכונות:

1. $r_{U,U} = \mathrm{Id}_U$.
2. $r_{U_2,U_1} \circ r_{U_3,U_2} = r_{U_3,U_1}$
3. לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ וכיסוי פתוח $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, בהינתן $f_\alpha \in O_X(U_\alpha)$ לכל $\alpha \in A$ עם $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\beta \cap U_\alpha}$ לכל $\alpha, \beta \in A$, קיימת $f \in O_X(U)$ יחידה עם $r_{U,U_\alpha}(f) = f_\alpha$ לכל $\alpha \in A$.

הגדרה 1.6 במצב זה, אומרים שהזוג (X, O_X) הוא אלומה מעל המרחב הטופולוגי X. לאלומה כזו קוראים יריעה אפינית.

משפט 1.7 תהי $0 \neq f \in F[X]$. אזי

$$O_X(D_X(F)) = F[X]_f = \left\{\frac{g}{f^k} \mid g \in F[X], k \in \mathbb{N}\right\}$$

הוכחה: ברור כי $\frac{g}{f^k} \in O_X(D_X(f))$, לכל $k \geq 0$ ולכל $g \in F[X]$. לכן

$$F[X]_f \subseteq O_X(D_X(f))$$

להיפך, תהי $\alpha \in O_X(D_X(f))$. נגדיר

$$B = \{g \in F[X] \mid g\alpha \in F[X]\}$$

זהו אידאל של $F[X]$. תהי $z \in D_X(f)$. נכתוב

$$\alpha = \frac{h}{g}$$

כאשר $h, g \in F[X]$, $g(z) \neq 0$. כעת, $g\alpha = h$, ולכן $g \in B$. לכן $z \notin V_X(B)$. בסך הכל קיבלנו

$$D_X(f) \subseteq X \backslash V_X(B)$$

כלומר

$$X \backslash V_X(f) \subseteq X \backslash V_X(B)$$
$$V_X(f) \supseteq V_X(B)$$

מכאן נקבל

$$I_X(V_X(f)) \subseteq I_X(V_X(B))$$
$$\sqrt{F[X]f} \subseteq \sqrt{B}$$
$$f \in \sqrt{B}$$

יש k עבורו $f^k \in B$, כלומר $f^k\alpha \in F[X]$, כלומר $\alpha \in \frac{F[X]}{f^k} \subseteq F[X]_f$. ■

מסקנה 1.8

$$O_X\left(X\right)=F\left[X\right]$$

הוכחה: נקח $f=1$ במשפט:

$$D_X\left(1\right)=X$$
$$F\left[X\right]_1=F\left[X\right]$$

$\blacksquare$