אלגברה ב3

ארזים ©

19 בינואר 2017

1 צעדים קטנטנים ראשונים בגיאומטריה אלגברית

טענה 1.1 תהיינה $0 \neq Y \subseteq X \subseteq F^n$ תת קבוצות. אזי Y אי פריקה אם ורק אם הסגור של Y בתוך X קבוצה אי פריקה.

הוכחה: נסמן בתור $\overline{Y}$ את הסגור של Y בתוך X.

נניח כי Y אי פריקה, ונניח כי $\overline{Y} = Y_1 \cup Y_2$ כאשר Y_1, Y_2 סגורות בתוך $\overline{Y}$ (ולכן גם בתוך X). כעת,

$$Y = Y \cap \overline{Y} = (Y \cap Y_1) \cup (Y \cap Y_2)$$

וכמובן ששני המאוחדים הם קבוצות סגורות בתוך Y. לכן, בלי הגבלת הכלליות,

$$Y = Y \cap Y_1$$
$$Y \subseteq Y_1$$

לכן,

$$\overline{Y} \subseteq \overline{Y_1} = Y_1$$

ומכאן

$$\overline{Y} = Y_1$$

לכן קיבלנו כי $\overline{Y}$ אי פריקה.

בכיוון השני, נניח כי $\overline{Y}$ אי פריקה, ונניח כי $Y = Y_1 \cup Y_2$, כאשר Y_1, Y_2 סגורות בתוך Y. לכן קיימות $C_1, C_2 \subseteq X$ סגורות בתוך X כך שמתקיים

$$Y_i = Y \cap C_i$$

לכן

$$Y \subseteq C_1 \cup C_2$$

אגף ימין היא קבוצה סגורה בתוך X, ולכן

$$\overline{Y} \subseteq C_1 \cup C_2$$

לכן נקבל

$$\overline{Y} = \left(\overline{Y} \cap C_1\right) \cup \left(\overline{Y} \cap C_2\right)$$

וכמובן ששני המאוחדים הם קבוצות סגורות בתוך $\overline{Y}$. לכן, בלי הגבלת הכלליות, מתקיים

$$\overline{Y} = \overline{Y} \cap C_1$$
$$\overline{Y} \subseteq C_1$$

מכאן נקבל

$$Y \subseteq C_1$$

ולכן

$$Y_1 = Y \cap C_1 = Y$$

ולכן נקבל כי Y אי פריקה. ■

משפט 1.2 תהי $X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית לא ריקה. אזי יש בתוך X מספר סופי של תת קבוצות אי פריקות מקסימליות ואלה מכסות את X.

הוכחה: מהטענה, תת קבוצה Y של X אי פריקה מקסימלית היא סגורה, כי גם $\overline{Y} \subseteq X$ היא אי פריקה, וכן $Y \subseteq \overline{Y}$, ולכן $Y = \overline{Y}$. נראה כי כל תת קבוצה אלגברית של X היא איחוד סופי של תת קבוצות אי פריקות וסגורות.

נניח בשלילה שזה לא נכון. נתבונן בקבוצת כל תת הקבוצות האלגבריות של X שאינן ניתנות לכתיבה כאיחוד סופי שכזה. כיוון שהמרחב X הוא מרחב נתר, יש בקבוצה הזו איבר מינימלי Z. Z בהכרח פריקה, ולכן ניתן לכתוב $Z = Z_1 \cup Z_2$ כאשר $Z_1, Z_2 \subsetneq Z$ וסגורות בתוך Z - ולכן סגורות בתוך X. ממינימליות Z, כל אחת מבין Z_1, Z_2 ניתן לכתוב כאיחוד סופי שכזה, ולכן גם Z - בסתירה.

נכתוב $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$ כאשר $X_1, \ldots, X_n$ סגורות ואי פריקות. נניח, בלי הגבלת הכלליות, כי אין אף הכלה בין X_i, X_j כלשהן. תהי $Y \subseteq X$ תת קבוצה אי פריקה. נכתוב

$$Y = (Y \cap X_1) \cup \cdots \cup (Y \cap X_n)$$

כאשר כל מאוחד הוא סגור בתוך Y. לכן, מאי פריקות Y, מתקיים עבור i כלשהו

$$\begin{aligned} Y &= Y \cap X_i \\ Y &\subseteq X_i \end{aligned}$$

לכן $X_1, \ldots, X_n$ הן אי פריקות מקסימליות. לכן כל תת קבוצה X_i היא מקסימלית, וכן $X_i \neq X_j$, לכל $i \neq j$. הקבוצות הללו הן בדיוק כל תתי הקבוצות האי פריקות המקסימליות של X. ■

הגדרה 1.3 תתי הקבוצות האי פריקות המקסימליות בתוך $X \subseteq F^n$ נקראות המרכיבים האי פריקים של X.

ראינו כבר כי $P_i = I(X_i)$ הוא אידאל ראשוני. כעת,

$$I(X) = I\left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right) = I\left(\bigcup_{i=1}^{N} V(P_i)\right) = I(V(P_1 \cap \cdots \cap P_n)) = \sqrt{P_1 \cap \cdots \cap P_n} =$$
$$= \sqrt{P_1} \cap \cdots \cap \sqrt{P_n} = P_1 \cap \cdots \cap P_n$$

זהו הפירוק הפרימרי של $I(X)$.

דוגמא יהי $f(x) \in R = F[x_1, \ldots, x_n]$ לא קבוע. נפרק:

$$f(x) = p_1(x)^{k_1} \ldots p_l(x)^{k_l}$$

כאשר $p_i(x)$ אי פריקים ולא חברים (כלומר אין שניים שנבדלים בכפל בקבוע). אזי,

$$V((f(x))) = \{a \in F^n \mid f(a) = 0\} = V((p_1(x))) \cup \cdots \cup V((p_l(x)))$$

האידאלים $(p_i(x))$ הם ראשוניים, כי $p_i(x)$ פולינומים אי פריקים. לכן קיבלנו את הפירוק למרכיבים אי פריקים של $V((f(x)))$.

1.1 פונקציות רגולריות

הגדרה 1.4 תהי $\emptyset \neq X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית. פונקציה $\varphi : X \to F$ תקרא רגולרית אם φ מתקבלת כצמצום של פולינום $f(x) \in R = F[x_1, \ldots, x_n]$.

$f(x)$ אינו נקבל על ידי φ באופן יחיד - הוא נקבע מודולו $I(X)$. לכל פולינום $g(x) \in I(x)$, מתקיים

$$\varphi(v) = f(v) + g(v)$$

לכל $v \in X$. לכן נראה את φ כאיבר של $F[X] = F[x_1, \ldots, x_n] \big/ I(X)$. זוהי כמובן אלגברה.

הגדרה 1.5 האלגברה $F[X]$ נקראת אלגברת הפונקציות הרגולריות על X.

תכונות

1. $F[X]$ היא אלגברה נוצרת סופית מעל F.
2. האיבר הנילפוטנטי היחיד של $F[X]$ הוא 0.

הגדרה 1.6 אלגברה מעל F המקיימת את שתי התכונות הללו נקראת אלגברה אפינית.

טענה 1.7 תהי A אלגברה אפינית מעל F. אזי קיימים n טבעי ותת קבוצה אלגברית $X \subseteq F^n$ כך שמתקיים

$$A \cong F[X]$$

הוכחה: A נוצרת סופית, ולכן יש בה איברים $a_1, \ldots, a_n$ שיוצרים אותה, כלומר $A = F[a_1, \ldots, a_n]$. לכן A תמונה הומומורפית של אלגברת הפולינומים $R = F[x_1, \ldots, x_n]$, לפי

$$x_i \mapsto a_i$$

יהי $I \subseteq R$ הגרעין של ההומומורפיזם הזה. אזי

$$F[x_1, \ldots, x_n]/I \cong A$$

כיוון שמתקיים $\mathcal{N}(A) = 0$, זה אומר שמתקיים $\sqrt{I} = I$. לכן נסמן

$$X = V(I)$$

ונקבל

$$I(X) = I(V(I)) = I$$

לכן

$$A \cong R/I(X) = F[X]$$

כנדרש. ■