אלגברה ב3

© ארזים

16 בינואר 2017

1 קבוצות אלגבריות

הגדרה 1.1 יהי F שדה סגור אלגברית, ונסמן $R = F[x_1, \ldots, x_n]$. יהי $J \subseteq R$ אידאל. נסמן את הקבוצה האלגברית האפינית $V(J)$ להיות:

$$V(J) = \{a \in F^n \mid \forall f \in J \;\; f(a) = 0\}$$

טענה 1.2

1.
$$V(J) = 0 \iff J = R$$

2.
$$V(J) = F^n \iff J = 0$$

3. אם $I \subseteq J$ אידאלים אזי $V(J) \subseteq V(I)$.

4. לקבוצת אידאלים $\{I_\alpha\}_{\alpha \in L}$ מתקיים

$$V\left(\bigcup_{\alpha \in L} I_\alpha\right) = V\left(\sum_{\alpha \in L} I_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in L} V(I_\alpha)$$

5. לקבוצה סופית של אידאלים $\{J_i\}_{i=1}^m$ מתקיים

$$\bigcup_{i=1}^{r} V(J_i) = V(J_1 J_2 \cdots J_m) = V\left(\bigcap_{i=1}^{m} J_i\right)$$

הוכחה:

1. ראינו כבר (משפט האפסים).
2. אם $J=0$, ברור כי $V\left(J\right)=F^{n}$. אם $V\left(J\right)=F^{n}$, יהי $f\in J$, ונכתוב:

$$f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{N}f_{i}\left(x_{1},\ldots,x_{n-1}\right)x_{n}^{i}$$

מהנתון, לכל $a_{1},\ldots,a_{n-1}\in F$ מתקיים

$$f\left(a_{1},\ldots,a_{n-1},x_{n}\right)=\sum_{i=0}^{N}f_{i}\left(a_{1},\ldots,a_{n-1}\right)x_{n}^{i}\in F\left[x_{n}\right]$$

לכל $a_{n}\in F$ מתקיים

$$f\left(a_{1},\ldots,a_{n}\right)=0$$

ולכן, היות והשדה F אינסופי, נקבל כי $f\left(a_{1},\ldots,a_{n-1},x_{n}\right)=0\in R\left[x_{n}\right]$. כלומר לכל i מתקיים

$$f_{i}\left(a_{1},\ldots,a_{n-1}\right)=0$$

לכל $a_{1},\ldots,a_{n-1}\in F$. באינדוקציה, נקבל כי $f=0$.

3. ברור.
4. $a\in V\left(\bigcup I_{\alpha}\right)$ אם ורק אם $f\left(a\right)=0$ לכל $f\left(x\right)\in I_{\alpha}$ ולכל $\alpha\in L$. זה שקול לכך שמתקיים $a\in V\left(I_{\alpha}\right)$ לכל I_{α}, וזה כמובן לכך שמתקיים $a\in\bigcap V\left(I_{\alpha}\right)$.
5. כעת,

$$J_{1}\cdots J_{m}\subseteq\bigcap J_{i}\subseteq J_{i}$$

לכן,

$$V\left(J_{i}\right)\subseteq V\left(\bigcap J_{i}\right)\subseteq V\left(J_{1}\cdots J_{n}\right)$$

וזאת לכל $1\leq i\leq m$. לכן בפרט

$$\bigcup V\left(J_{i}\right)\subseteq V\left(\bigcap J_{i}\right)\subseteq V\left(\prod J_{i}\right)$$

אם $a\notin\bigcup V\left(J_{i}\right)$, אזי יש $f_{i}\left(x\right)\in J_{i}$ כך שמתקיים $f_{i}\left(a\right)\neq0$. מכאן, $f_{1}\left(x\right)\cdots f_{m}\left(x\right)\in J_{1}\cdots J_{m}$ אינו מאתפס בנקודה a. לכן $a\notin V\left(J_{1}\cdots J_{m}\right)$. זה נותן את ההכלה $V\left(J_{1}\cdots J_{m}\right)\supseteq\bigcup J_{i}$.

■

נתבונן בקבוצת כל תת הקבוצות האלגבריות של F^n. לפי הטענה, קבוצה זו מכילה את $\emptyset, F^n$, וכן היא סגורה תחת חיתוכים כלשהם ותחת איחודים סופיים.

הגדרה 1.3 כל משלים של קבוצה אלגברית ייקרא קבוצה פתוחה (זריצקי). קבוצה אלגברית תיקרא סגורה (זריצקי).

קבוצת הקבוצות הפתוחות בתוך F^n מקיימת:

1. היא מכילה את $\emptyset, F^n$.
2. היא סגורה תחת איחודים כלשהם.
3. היא סגורה תחת חיתוכים סופיים.

לכן היא טופולוגיה - כך מתקבלת טופולוגיית זריצקי על F^n.

דוגמא הקבוצות הסגורות (זריצקי) בתוך F הן הקבוצות הסופיות, וכן F בעצמה.

הגדרה 1.4 לכל תת קבוצה $X \subseteq F^n$, נגדיר

$$I\left(X\right)=\left\{ f\left(x\right)\in R\mid\forall x\in X\ \ f\left(x\right)=0\right\}$$

זהו אידאל של R.

טענה 1.5
1. אם $X_1 \subseteq X_2$ אזי $I\left(X_2\right)\subseteq I\left(X_1\right)$.
2. $I\left(F^n\right)=0$, $I\left(\emptyset\right)=R$.
3. לכל אידאל $J\subseteq R$ מתקיים $J\subseteq I\left(V\left(J\right)\right)$.
4. לכל תת קבוצה $X\subseteq F^n$ מתקיים $X\subseteq V\left(I\left(X\right)\right)$.
5. $I\left(\bigcup X_\alpha\right)=\bigcap I\left(X_\alpha\right)$.

אין כאן למעשה מה להוכיח - הכל ברור.

טענה 1.6
1. לכל אידאל $J\subseteq R$ מתקיים

$$V\left(J\right)=V\left(I\left(V\left(J\right)\right)\right)$$

2. לכל תת קבוצה $X\subseteq F^n$ מתקיים

$$I\left(X\right)=I\left(V\left(I\left(X\right)\right)\right)$$

הוכחה:

1. אמרנו כבר שמתקיים $J \subseteq I(V(J))$, ולכן מתקיים

$$V(I(V(J))) \subseteq V(J)$$

כעת, נסמן $X = V(J)$. מסעיף 4 בטענה הקודמת,

$$V(J) = X \subseteq V(I(X)) = V(I(V(J)))$$

ולכן בסך הכל

$$V(I(V(J))) = V(J)$$

2. אמרנו כבר שמתקיים $X \subseteq V(I(X))$, ולכן מתקיים

$$I(V(I(X))) \subseteq I(X)$$

כעת, נסמן $J = I(X)$. מסעיף 3 בטענה הקודמת,

$$I(X) = J \subseteq I(V(J)) = I(V(I(X)))$$

ולכן בסך הכל

$$I(V(I(X))) = I(X)$$

■

מסקנה 1.7 לקבוצה אלגברית $X \subseteq F^n$,

$$V(I(X)) = X$$

זה לפי סעיף 1 בטענה הקודמת.

הערה 1.8 לכל תת קבוצה X מתקיים

$$I(X) = \sqrt{I(X)}$$

הגדרה 1.9 אידאל כזה נקרא רדיקלי.

1.1 משפט האפסים של הילברט - חלק ב'

משפט 1.10 (האפסים של הילברט - הגרסה החזקה) יהי $J \subseteq R = F[x_1, \ldots, x_n]$ אידאל, כאשר F שדה סגור אלגברית. אזי

$$I(V(J)) = \sqrt{J}$$

הוכחה: בבירור

$$\sqrt{J} \subseteq I(V(J))$$

אם $I(V(J)) = 0$, אז נובע מכאן שגם $\sqrt{J} = 0$, ולכן נקבל את השוויון. לכן נניח כי $I(V(J)) \neq 0$.

R חוג נתר, ולכן יהיו $f_1(x), \ldots, f_r(x)$ יוצרים של האידאל J (כל אידאל בחוג נתר נוצר סופית).

יהי $0 \neq g(x) \in I(V(J))$. נבצע את מה שנקרא **<u>הטריק של רבינוביץ'</u>**:
נתבונן באידאל

$$T = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}g(x_1, \ldots, x_n) - 1) \subseteq F[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]$$

אזי מתקיים

$$V(J) = \left\{(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in F^{n+1} \mid \forall 1 \leq i \leq r \;\; f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0, a_{n+1}g(a_1, \ldots, a_n) - 1 = 0\right\}$$

אם כן, אם $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in V(T)$, אזי בבירור

$$(a_1, \ldots, a_n) \in V(J)$$

לקחנו $g(x) \in I(V(J))$, ולכן

$$g(a_1, \ldots, a_n) = 0$$
$$a_{n+1}g(a_1, \ldots, a_n) - 1 = -1 \neq 0$$

ולכן $V(T) = \emptyset$. ממשפט האפסים של הילברט בגרסתו החלשה, נסיק

$$T = F[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]$$

לכן אפשר להציג

$$1 = \sum_{i=1}^{r} h_i(x_1, \ldots, x_{n+1}) f_i(x_1, \ldots, x_n) + \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})(x_{n+1}g(x_1, \ldots, x_n) - 1)$$

זהו שוויון גם בשדה המנות $F\left(x_1,\ldots,x_n\right)$. אם כן, נוכל להציב

$$x_{n+1}=\frac{1}{g\left(x_1,\ldots,x_n\right)}$$

נקבל

$$1=\sum_{i=1}^{r}h_i\left(x,\frac{1}{g\left(x\right)}\right),f_i\left(x\right)$$

$h_i\left(x,\frac{1}{g(x)}\right)$ הוא צירוף לינארי של מונומים מהצורה

$$x_1^{l_1}\cdots x_n^{l_n}\frac{1}{g\left(x\right)^{l_{n+1}}}$$

ולכן על ידי לקיחת מכנה משותף גדול מספיק מתקבל

$$h_i\left(x,\frac{1}{g\left(x\right)}\right)=\frac{\tilde{h_i}\left(x\right)}{g\left(x\right)^N}$$

כאשר $\tilde{h_i}\left(x\right)\in R$ לכל i. לכן נקבל

$$1=\sum_{i=1}^{r}\frac{\tilde{h_i}\left(x\right)f_i\left(x\right)}{g\left(x\right)^N}$$

$$g\left(x\right)^N=\sum_{i=1}^{r}\tilde{h_i}\left(x\right)f_i\left(x\right)\in J$$

ולכן $g\left(x\right)\in\sqrt{J}$. לכן נקבל גם את ההכלה השנייה, ובסך הכל נקבל את השוויון המבוקש. ■

אם כן נקבל כי ההעתקות

$$J\mapsto V\left(J\right)$$
$$X\mapsto I\left(X\right)$$

בין קבוצת האידאלים הרדיקליים של R לבין קבוצת הקבוצות הסגורות של R^n הן הופכיות זו לזו (ובפרט חד־חד־ערכיות ועל):

$$I\left(V\left(J\right)\right)=\sqrt{J}=J$$
$$V\left(I\left(X\right)\right)=X$$

בהתאמה זו, הנקודות של F^n מתאימות לאידאלים המקסימליים של R:

$$I\left(\{(a_1,\dots,a_n)\}\right)=\{f(x)\in R \mid f(a_1,\dots,a_n)=0\}=\sum_{i=1}^{n}R(x_i-a_i)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n}R(x_i-a_i)\right)=\{(a_1,\dots,a_n)\}$$

2 צעדים קטנטנים ראשונים בגיאומטריה אלגברית

2.1 טופולוגיית זריצקי

הגדרה 2.1 תהי $X\subseteq F^n$ תת קבוצה. הסגור של X הוא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר בתוך F^n שמכילה את X. באופן שקול, זהו חיתוך כל הקבוצות הסגורות שמכילות את X. נסמן אותו $\overline{X}$.

טענה 2.2 תהי $X\subseteq F^n$. אזי

$$\overline{X}=V(I(X))$$

הוכחה: ידוע כי $X\subseteq V(I(X))$, וכן כי $V(I(X))$ סגורה. לכן

$$\overline{X}\subseteq V(I(X))$$

כעת, תהי Y תת קבוצה סגורה של F^n המכילה את X. לכן מתקיים

$$\overline{X}\subseteq Y$$

כמו כן,

$$\begin{gathered}X\subseteq Y\\ I(X)\supseteq I(Y)\\ V(I(X))\subseteq V(I(Y))=Y\end{gathered}$$

לכן $V(I(X))\subseteq Y$, לכל Y סגורה שמכילה את X - ולכן בפרט

$$V(I(X))\subseteq\overline{X}$$

וזו ההכלה השנייה. לכן נקבל את השוויון שרצינו. ■

טענה 2.3 1. תהי

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$$

שרשרת יורדת של תת קבוצות סגורות של F^n. אזי השרשרת מתייצבת.

2. בכל קבוצה של תת קבוצות סגורות של F^n יש איבר מינימלי (ביחס להכלה).

3. תהי $X \subseteq F^n$ תת קבוצה סגורה. אזי לכל כיסוי פתוח של X יש תת כיסוי סופי.

הוכחה:

1. נקבל את השרשרת

$$I(X_1) \subseteq I(X_2) \subseteq \dots$$

וזו שרשרת עולה של אידאלים בחוג נתר R, ולכן מתייצבת. לכן יש אינדקס m עבורו לכל $j \geq 1$ מתקיים

$$I(X_{m+j}) = I(X_m)$$

מכאן, לכל $j \geq 1$ מתקיים

$$X_{m+j} = V(I(X_{m+j})) = V(I(X_m)) = X_m$$

ולכן השרשרת מתייצבת.

2. ראינו בעבר $(2) \iff (1)$ באופן כללי.

3. נניח כי

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in L} U_\alpha$$

כאשר $U_\alpha \in F^n$ פתוחות. יהי $I_\alpha \subseteq R$ אידאל עבורו

$$U_\alpha = F^n \backslash V(I_\alpha)$$

כעת,

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha \in L} (F^n \backslash V(I_\alpha)) = F^n \backslash \bigcap_{\alpha \in L} V(I_\alpha) = F^n \backslash V\left(\sum_{\alpha \in L} I_\alpha\right)$$

כיוון שהחוג R נתר, האידאל $\sum I_\alpha$ נוצר סופית, ולכן יש תת קבוצה סופית $L_0 \subseteq L$ כך שמתקיים

$$\sum_{\alpha \in L} I_\alpha = \sum_{\alpha \in L_0} I_\alpha$$

לכן

$$X \subseteq F^n \backslash V\left(\sum_{\alpha\in L_0} I_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in L_0} I_\alpha$$

כמו שרצינו.

$\blacksquare$

הגדרה 2.4 מרחב טופולוגי המקיים את (1) בטענה, ששקול לקיום (2), נקרא מרחב נתר.
מרחב טופולוגי המקיים את (3) בטענה נקרא מרחב קוואזי־קומפקטי.

הגדרה 2.5 תהי $\emptyset \neq X \subseteq F^n$ תת קבוצה סגורה. נאמר כי X קבוצה אי פריקה אם אי אפשר לכתוב את X כאיחוד לא טריוויאלי של שתי קבוצות סגורות. כלומר, אם $X_1, X_2 \subsetneq X$ סגורות, אזי גם $X_1 \cup X_2 \subsetneq X$.

טענה 2.6 תהי $\emptyset \neq X \subseteq F^n$ סגורה. אזי X אי פריקה אם ורק אם $I\left(X\right)$ אידאל ראשוני.

הוכחה: נניח כי X אי פריקה. כעת נניח כי $f, g \in R$ כך שמתקיים $f \cdot g \in I\left(X\right)$. מכאן,

$$\left(Rf\right)\left(Rg\right) \subseteq I\left(X\right)$$

לכן,

$$X = V\left(I\left(X\right)\right) \subseteq V\left(Rf \cdot Rg\right) = V\left(Rf\right) \cup V\left(Rg\right)$$

לכן

$$X = \left(X \cap V\left(Rf\right)\right) \cup \left(X \cap V\left(Rg\right)\right)$$

וזהו איחוד של שתי קבוצות סגורות. X אי פריקה, ולכן אחד מהמאוחדים הוא X - בלי הגבלת הכלליות,

$$X \subseteq V\left(Rf\right)$$

לכן

$$Rf \subseteq \sqrt{Rf} = I\left(V\left(Rf\right)\right) = I\left(X\right)$$

ולכן $f \in I\left(X\right)$, כלומר $I\left(X\right)$ אידאל ראשוני.
כעת, נניח כי $I\left(X\right)$ אידאל ראשוני. נניח כי

$$X = X_1 \cup X_2$$

עבור X_1, X_2 סגורות.

$$I(X) = I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$$

ראינו בעבר כי אם אידאל ראשוני מוכל בחיתוך של שני אידאלים, אזי בהכרח אחד הנחתכים שווה לו - בלי הגבלת הכלליות,

$$I(X) = I(X_1)$$

לכן

$$X = V(I(X)) = V(I(X_1)) = X_1$$

ולכן X אי פריקה. ■

דוגמאות

1. F^n אי פריק, שכן $I(F_n) = 0$, וזהו אידאל ראשוני בחוג R, שכן R תחום שלמות.
2. כל נקודה בתוך F^n היא אי פריקה (מההגדרה). האידאל המתאים לה הוא מקסימלי - ובפרט ראשוני.

2.2 טופולוגיה מושרית וקבוצות אי פריקות

תהי $\emptyset \neq X \subseteq F^n$ תת קבוצה. על X יש לנו את הטופולוגיה המושרית מטופולוגיית זריצקי של F^n.

הגדרה 2.7 תהי $\emptyset \neq X \subseteq F^n$ תת קבוצה. נאמר כי X אי פריקה אם אי אפשר לכתוב את X כאיחוד לא טריוויאלי של שתי קבוצות סגורות בתוך X.

טענה 2.8 X אי פריקה אם ורק אם החיתוך של כל שתי קבוצות פתוחות ולא ריקות בתוך X אינו ריק.

הוכחה: נניח כי X אי פריקה, ויהיו $U, V \subseteq X$ פתוחות בתוך X. נניח כי $U \cap V = \emptyset$. אזי

$$X = X \backslash (U \cap V) = (X \backslash U) \cup (X \backslash V)$$

הקבוצות $X \backslash U, X \backslash V$ סגורות בתוך X, והרי X אי פריקה, ולכן, בלי הגבלת הכלליות,

$$X = X \backslash U$$

כלומר $U = \emptyset$.

כעת, נניח כי התנאי על קבוצות פתוחות מתקיים, ויהיו X_1, X_2 סגורות בתוך X עבורן $X = X_1 \cup X_2$. אזי

$$\emptyset = X \backslash X = X \backslash \left(X_1 \cup X_2\right) = \left(X \backslash X_1\right) \cap \left(X \backslash X_2\right)$$

הקבוצות $X \backslash X_1, X \backslash X_2$ פתוחות בתוך X, ולכן, בלי הגבלת הכלליות,

$$X \backslash X_1 = \emptyset$$

כלומר $X = X_1$. ■

תרגיל X אי פריקה אם ורק אם כל תת קבוצה לא ריקה ופתוחה של X היא צפופה בתוך X (כלומר הסגור שלה הוא X).