אלגברה ב3

ארזים ©

12 בינואר 2017

1 משפט האפסים של הילברט

אנחנו באמצע ההוכחה כי אם $F \subseteq B$ שדות, B נוצר סופית כאלגברה מעל F נסמן $B = F[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, אזי $\dim_F B < \infty$. **הוכחה:** אנחנו מוכיחים באינדוקציה, ואת מקרה הבסיס ראינו.

כעת, נסמן $B \supseteq A = F[\alpha_1]$ (תחום שלמות), ויהי K שדה המנות של A, $K = F(\alpha_1)$. כיוון שמתקיים

$$B = A[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$$

אזי

$$B = K[\alpha_2, \ldots, \alpha_n]$$

ובאינדוקציה $\dim_K B < \infty$. מכאן $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$אלגבריים מעל K. נכתוב את המשוואות המינימליות שלהם מעל K:

$$\alpha_r^{m_r} + \sum_{i=1}^{m_r-1} \frac{a_{r,i}}{b_{r,i}} \alpha_r^i = 0$$

כאשר $a_{r,i}, b_{r,i} \in A$. על ידי יצירת מכנה משותף אפשר להניח כי $b_{i,r} = b \neq 0$ לכל i, r. נתבונן בלוקליזציה של A לפי $\{b^l\}_{l \geq 0}$, A_b. אזי $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ שלמים מעל A_b. כיוון שנתון כי B שדה,

$$A_b = A\left[\frac{1}{b}\right] = F\left[\alpha_1, \frac{1}{b}\right]$$

כיוון שהאיברים $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ שלמים מעל A_b, גם B שלם מעל A_b, וכיוון שזהו שדה, גם A_b שדה. נראה כי מכאן נובע כי α_1 אלגברי מעל F. בשלילה, נניח כי α אינו אלגברי מעל F, ונקבל כי

$$A = F[\alpha_1] \cong F[t]$$

חוג הפולינומים במשתנה אחד t מעל F. מכאן $F(t) \cong K$ - שדה הפונקציות הרציונאלית במשתנה t מעל F. נסיק כי יש פולינום $0 \neq f(t) \in F(t)$ עבורו $F(t) = F[t]_{f(t)}$ וזה לא נכון - כי יהי $p(t) \in F[t]$ זר לפולינום $f(t)$. בפרט, $K \ni \frac{1}{p(t)} = \frac{g(t)}{f(t)^l}$, כאשר $g(t) \in F[t]$, ולכן

$$f(t)^l = g(t)\,p(t)$$

בסתירה לזרות $p(t), f(t)$. לכן α_1 אלגברי מעל F, ואז $A \subseteq B$ שדה בעצמו, וכן $K = A$. כמו כן, $\dim_F A < \infty$. לכן

$$\dim_F B = \dim_A B \dim_F A < \infty$$

■

משפט 1.1 יהי F שדה סגור אלגברית. יהי $R = F[x_1, \ldots, x_n]$. אזי האידאלים המקסמליים של R הם בדיוק אלה מהצורה

$$R(x_1 - a_1) + \cdots + R(x_n - a_n)$$

כאשר $a_1, \ldots, a_n \in F$.

הוכחה: נראה כי

$$I = \sum_{i=1}^{n} R(x_i - a_i)$$

אידאל מקסימלי. נתבונן בהומומורפיזם

$$\varphi : R \to F$$
$$\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(a_1, \ldots, a_n)$$

זהו אפימוזפיזם, וכן

$$\ker\varphi = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in R \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

זהו אידאל מקסימלי, שכן $R/\ker\varphi \cong F$. כמובן,

$$I \subseteq \ker\varphi$$

להיפך, יהי $f(x_1, \ldots, x_n) \in \ker\varphi$. נכתוב בצורה

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{l} f_i(x_1, \ldots, x_{n-1})(x_n - a_n)^i$$

כאשר $f_i(x_1,\dots,x_{n-1}) \in F[x_1,\dots,x_{n-1}]$. הצבת $x_n = a_n$ בפולינום זה נותנת 0, כי $f(a_1,\dots,a_n) = 0$. לכן

$$f_0(a_1,\dots,a_{n-1}) = 0$$

באינדוקציה,

$$f_0(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \sum_{i=1}^{n-1} F[x_1,\dots,x_{n-1}](x_i - a_i)$$

לכן

$$f(x_1,\dots,x_n) \in \sum_{i=1}^{n-1} F[x_1,\dots,x_{n-1}](x_i - a_i) + F[x_1,\dots,x_n](x_n - a_n) \subseteq \sum_{i=1}^{n} R(x_i - a_i)$$

לכן $I = \ker\varphi$.

כעת, יהי m מקסימלי כלשהו. נתבונן בשדה $B = R/m$. זהו שדה שנוצר סופית כאלגברה מעל F. הוא נוצר כל ידי $x_1 + m, \dots, x_n + m$. נסמן

$$\overline{F} = F(1+m)$$

תמונה הומומורפית של F בתוך B. זהו תת שדה סגור אלגברית של B. לכן $\overline{F} \subseteq B$ שדות, כאשר B נוצר סופית כאלגברה מעל $\overline{F}$, ולכן מהמשפט הקודם $\dim_{\overline{F}} B < \infty$. אבל $\overline{F}$ סגור אלגברית, ולכן $B = \overline{F}$. לכן יש $a_i \in F$, $1 \le i \le n$, עבורם $x_i + m = a_i + m$, ולכן $x_i - a_i \in m$, כלומר

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i - a_i) \subseteq m$$

אגף שמאל הוא אידאל שראינו שהוא מקסימלי, ולכן

$$m = \sum_{i=1}^{n} R(x_i - a_i)$$

■

משפט 1.2 (משפט האפסים של הילברט, הגרסה החלשה) יהי F שדה סגור אלגברית. יהי $R = F[x_1,\dots,x_n]$. יהי $I \subsetneq R$ אידאל. אזי יש $(a_1,\dots,a_n) \in F^n$ כך שלכל $f \in I$ מתקיים $f(a_1,\dots,a_n) = 0$ - כלומר הוא אפס משותף של כל איברי I.

הוכחה: יהי $m \subseteq R$ אידאל מקסימלי המכיל את I. לכן יש $(a_1,\dots,a_n) \in F^n$ עבורו

$$m = \{f(x_1,\dots,x_n) \in R \mid f(a_1,\dots,a_n) = 0\}$$

ולכן סיימנו. ■

2 קבוצות אלגבריות

הגדרה 2.1 יהי F שדה סגור אלגברית, ויהי $R = F[x_1, \ldots, x_n]$. תהי $T \subseteq R$ קבוצת פולינומים. נגדיר קבוצה אלגברית להיות:

$$V(T) = \{a \in F^n \mid \forall f(x) \in T \;\; f(a) = 0\} = V(I_T)$$

כאשר I_T האידאל הנוצר על ידי T.

אפשר תמיד להחליף את T בתת קבוצה סופית כי נתבונן בקבוצת האידאלים מהצורה $I_{T'}$, כאשר $T' \subseteq T$ תת קבוצה סופית. כיון שהחוג R חוג נתר, יש בקבוצה זו איבר מקסימלי I_{T_0}, כאשר $T_0 \subseteq T$ תת קבוצה סופית. בהכרח

$$I_{T_0} = I_T$$

כי אם $I_{T_0} \subsetneq I_T$, אז ברור שיש פולינום $f(x) \in T \backslash T_0$ עבורו $f(x) \notin I_{T_0}$, ואז

$$T_1 = T_0 \cup \{f(x)\} \supsetneq T_0$$

וכן $I_{T_1} \supsetneq I_{T_0}$.