אלגברה ב3

© ארזים

5 בינואר 2017

1 הרחבות שלמות

1.1 משפט הירידה

משפט 1.1 יהיו $B \subseteq A$ תחומי שלמות. נניח כי A סגור בשלמות, וכי B שלם מעל A. נתונות שתי שרשרות יורדות של אידאלים ראשוניים:

$$A \supsetneq P_1 \supsetneq P_2 \supsetneq \cdots \supsetneq P_n$$
$$B \supsetneq Q_1 \supsetneq Q_2 \supsetneq \cdots \supsetneq Q_m$$

כאשר $m < n$, וכן לכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים $Q_i \cap A = P_i$. אזי אפשר להאריך את השרשרת בתוך B להיות

$$Q_1 \supsetneq Q_2 \supsetneq \cdots \supsetneq Q_n$$

כך שלכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $Q_i \cap A = P_i$.

הוכחה: כמו בהוכחת משפט העלייה, מספיק להניח כי $m = 1, n = 2$.

$$A \supsetneq P_1 \supsetneq P_2$$
$$Q \supsetneq Q_1$$

וכן $Q_1 \cap A = P_1$. נתבונן בלוקליזציה B_{Q_1} - כיוון שמדובר בתחומי שלמות, ההומומורפיזם

$$f : B \to B_{Q_1}$$
$$f(x) = \frac{x}{1}$$

הוא חד חד ערכי. נזהה את B כחוג חלקי של B_{Q_1}. נוכיח כי

$$B_{Q_1} P_2 \cap A = P_2$$

ברור כי $P_2 \subseteq B_{Q_1}P_2 \cap A$. כעת, נניח כי $0 \neq x \in B_{Q_1}P_2 \cap A$. נכתוב

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{s_i}\frac{p_{2,i}}{1} = \frac{y}{s}$$

כאשר $b_i \in B, s_i \in S = B\backslash Q_1, p_{2,i} \in P_2$, $\frac{y}{s}$ הוא מה שמתקבל אחרי לקיחת מכנה משותף. כלומר $s \in S, y \in BP_2$. ראינו כי הסגור השלם של האידאל P_2 בחוג B הוא $\sqrt{CP_2}$, כאשר C הוא הסגור השלם של A בתוך B. כאן $C = B$, שכן נתון כי B שלם מעל A. לכן הסגור השלם של P_2 בתוך B הוא $\sqrt{BP_2}$. בפרט, y שלם מעל P_2.

יהי F שדה המנות של A. ראינו כי המשוואה המינימלית של y מעל F נראית כך:

$$y^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^i = 0$$

כאשר לכל i מתקיים $a_i \in \sqrt{P_2} = P_2$. במונום x^n (הפעולות הן בשדה המנות B, F_B, שנבחר כך שמתקיים $F \subseteq F_B$), ונשים לב כי $s = \frac{y}{x}$, ולכן

$$s^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{x^{n-i}} s^i = 0$$

זו משוואה עם מקדמים מתוך F. זאת המשוואה המינימלית מעל F שאותה מקיים s, כי אם s מקיים משוואה מתוקנת ממעלה r, על ידי כפל במונום x^r נקבל משוואה מתוקנת ממעלה r מעל F שאותה מקיים y.

$s \in B$, ולכן שלם מעל A, ולכן לפי משפט מהשיעור הקודם, נקבל כי

$$\frac{a_{n-i}}{x^i} \in A$$

לכל $1 \leq i \leq n$. כעת, נניח בשלילה כי $x \notin P_2$. אזי גם x^i אינו איבר של P_2, מראשוניות. אבל $\frac{a_{n-i}}{x_i} \cdot x^i = a_{n-i} \in P_2$. מראשוניות, נקבל כי

$$\frac{a_{n-i}}{x^i} \in P_2$$

וזאת לכל i. נקבל כי

$$s^n = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_{n-i}}{x^i} s^{n-i} \in BP_2 \subseteq BP_1 \subseteq BQ_1 = Q_1$$

לקחנו $s \in B\backslash Q_1$, ולכן מראשוניות $s^n \notin Q_1$ - בסתירה. לכן $x \in P_2$, וקיבלנו את השוויון שרצינו.

כעת, נתבונן בהומומורפיזם הבא:

$$\varphi : A \hookrightarrow B \hookrightarrow B_{Q_1}$$
$$\varphi(a) = \frac{a}{1} \in B_{Q_1}$$

זהו הומומורפיזם של חוגים, וממה שהוכחנו,

$$\varphi^{-1}\left(B_{Q_1}\varphi\left(P_2\right)\right) = B_{Q_1}P_2 \cap A = P_2$$

במקרה כזה הוכחנו בעבר שקיים אידאל ראשוני Q_2' בחוג B_{Q_1} עבורו

$$P_2 = \varphi^{-1}\left(Q_2'\right) = Q_2' \cap A$$

לכן נכתוב

$$P_2 = Q_2' \cap A = Q_2' \cap B \cap A$$

נסמן $Q_2' \cap B = Q_2$, ונקבל אידאל ראשוני של B שמקיים

$$P_2 = Q_2 \cap A$$

בבירור, Q_2 זר לקבוצה הכפלית $B \backslash Q_1$, כלומר $Q_2 \subsetneq Q_1$. ■

1.2 תחומי/חוגי דדקינד

משפט 1.2 חוג דדקינד הוא תחום שלמות, סגור בשלמות, שהוא גם חוג נתר ובו כל אידאל ראשוני שאינו 0 הוא מקסימלי.

דוגמא תחום שלמות הוא חוג דדקינד.

טענה 1.3 יהי R חוג דדקינד. תהי $S \subseteq R$ קבוצה כפלית. אזי גם $S^{-1}R$ חוג דדקינד.

הוכחה: יהי F שדה המנות של R. אז F הוא גם שדה המנות של $S^{-1}R$. נזהה $R \subseteq S^{-1}R \subseteq F$.

ראינו כי $S^{-1}R$ הוא חוג נתר, וגם כי הוא סגור בשלמות.

יהי $0 \neq Q \subseteq S^{-1}R$ אידאל ראשוני. ראינו כי $Q = S^{-1}P$ כאשר $P \subseteq R$ אידאל ראשוני ומתקיים $P = Q \cap R = f^{-1}(Q)$ - ההומומורפיזם f הוא הקבוע שאנחנו לוקחים בחוגי שברים. לכן $P \subseteq R$ מקסימלי, ולכן גם $Q \subseteq S^{-1}R$ מקסימלי - אחרת, נניח כי $Q \subseteq Q' \subseteq S^{-1}R$ עבור Q' מקסימלי, אזי $Q' = S^{-1}P'$, כאשר $P' = Q' \cap R \supseteq Q \cap R = P$. P מקסימלי, ולכן $P' = P$, כלומר $Q = Q'$. לכן $S^{-1}R$ חוג דדקינד. ■