אלגברה ב3

ארזים ©

2 בינואר 2017

1 הרחבות שלמות

1.1 משפט העליה (Going Up Theorem)

משפט 1.1 נתונים תחומי שלמות $A \subseteq B$. נניח כי B שלם מעל A. אזי A שדה אם ורק אם B שדה.

הוכחה: נניח כי A שדה. יהי $0 \neq y \in B$. y שלם (אלגברי) מעל השדה A. נתבונן במשוואה המינימלית של y מעל A:

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 y + a_0 = 0$$

מהמינימליות, $a_0 \neq 0$, ולכן הוא הפיך. עם כן,

$$y\left(y^{n-1} + a_{n-1}y^{n-2} + \cdots + a_1\right)\left(-a_0^{-1}\right) = 1$$

ולכן y הפיך בתוך B. לכן כל איבר שאינו 0 הפיך בתוך B, כלומר B שדה.
נניח כי B שדה. יהי $0 \neq x \in A$. לכן יש לאיבר x הופכי בתוך B. x^{-1} שלם מעל A, ולכן יש משוואה:

$$\left(x^{-1}\right)^n + a_{n-1}\left(x^{-1}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 x^{-1} + a_0 = 0$$

נכפול פי x^n ונקבל

$$1 + a_{n-1}x + \cdots + a_n x^{n-1} + a_0 x^n = 0$$

ולכן

$$1 = x\left(-a_{n-1} - \cdots - a_1 x^{n-2} - a_0 x^{n-1}\right)$$

המוכפל השני הוא מתוך A, ולכן x הפיך גם בתוך A. לכן A שדה. ∎

מסקנה 1.2 נתונים חוגים $A \subseteq B$. יהי $Q \subseteq B$ אידאל ראשוני. נסמן $P = Q \cap A$ (אידאל ראשוני של A). נניח כי B שלם מעל A. אזי Q אידאל מקסימלי אם ורק אם P אידאל מקסימלי.

הוכחה: ראינו כי B/Q שלם מעל A/P, כאשר מזהים את A/P כתת חוג של B/Q על ידי $a + P \mapsto a + Q$. כיוון שנתון כי P, Q אידאלים ראשוניים, $A/P, B/Q$ תחומי שלמות. מהמשפט, B/Q שדה אם ורק אם A/P שדה, כלומר Q אידאל מקסימלי של B אם ורק אם P אידאל מקסימלי של A. ■

הגדרה 1.3 במצב שמתואר במסקנה הקודמת, נאמר כי האידאל Q <u>מונח מעל</u> האידאל P, והאידאל P <u>מונח מתחת</u> לאידאל Q.

משפט 1.4 נתונים חוגים $A \subseteq B$. נניח כי B שלם מעל A. נתונים שני אידאלים ראשוניים $Q \subseteq Q' \subseteq B$, כך שמתקיים

$$Q \cap A = Q' \cap A = P$$

אזי $Q = Q'$.

הוכחה: נסמן $S = A \backslash P$. נתבונן בחוגים $A_P = S^{-1}A$, $B_P = S^{-1}B$. A_P הוא חוג מקומי, שהאידאל המקסימלי בו הוא $m = S^{-1}P$. נסמן $n = S^{-1}Q \subseteq S^{-1}Q' = n'$. נרצה להראות כי $n \cap A_p = m$.

מתקיים

$$m = S^{-1}P \subseteq S^{-1}Q = n$$

ולכן

$$m \subseteq n \cap A_P$$

$n \cap A_P$ הוא אידאל ראשוני של A_P, ולכן ממקסימליות m נקבל $m = n \cap A_P$. באותו אופן, $m = n' \cap A_P$.

אנו יודעים כי B_P שלם מעל A_P, ולכן מהמקסנה הקודמת, היות והאידאל m מקסימלי, גם האידאלים n, n' מקסימליים. כיוון שמתקיים $n \subseteq n'$ נקבל $n = n'$. לכן

$$S^{-1}Q = S^{-1}Q'$$

אנחנו יודעים כי ההתאמה $J \mapsto S^{-1}J$, מהאידאלים הראשוניים $J \subseteq B$ שזרים לקבוצה S אל האידאלים הראשוניים של B_P, היא חד־חד־ערכית. לכן $Q = Q'$. ■

משפט 1.5 נתונים חוגים $A \subseteq B$ ונניח כי B שלם מעל A. יהי $P \subseteq A$ אידאל ראשוני. אזי קיים אידאל ראשוני $Q \subseteq B$ כך שמתקיים $Q \cap A = P$.

הוכחה: נתבונן בחוגים A_P, B_P כמו קודם. B_P שלם מעל A_P. האידאל המקסימלי היחיד של A_P הוא $m = S^{-1}P$. יהי $n \subseteq B_P$ אידאל מקסימלי. נסמן

$$\begin{aligned} \varphi : B &\to B_P \\ x &\mapsto \frac{x}{1} \\ f : A &\to A_P \\ x &\mapsto \frac{x}{1} \end{aligned}$$

$n \cap A_P$ הוא אידאל ראשוני של A_P. מהמסקנה, $n \subseteq B_P$ מקסימלי, ולכן גם $n \cap A_P \subseteq A_P$ מקסימי. לכן $n \cap A_P = m$. כעת, ידוע כי

$$\begin{aligned} P = f^{-1}(m) = f^{-1}(n \cap A_P) = \varphi^{-1}(n \cap A_P) \cap A = \\ = \varphi^{-1}(n) \cap \varphi^{-1}(A_P) \cap A = \varphi^{-1}(n) \cap A \end{aligned}$$

נסמן $Q = \varphi^{-1}(n)$. זהו אידאל ראשוני של B, ולראינו כי $P = Q \cap A$. ■

משפט 1.6 (משפט העלייה) נתונים $A \subseteq B$ חוגים. נניח כי B שלם מעל A. נתונות שתי שרשראות עולות ממש של אידאלים ראשוניים:

$$\begin{aligned} P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n \subseteq A \\ Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_m \subseteq B \end{aligned}$$

נניח כי $m < n$, וכן כי לכל $1 \le i \le m$ מתקיים

$$Q_i \cap A = P_i$$

אזי ניתן להרחיב את השרשרת של B להיות

$$Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n$$

על ידי אידאלים ראשוניים של B Q_i שגם עבורם $Q_i \cap A = P_i$.

הוכחה: די להראות הרחבה באיבר אחד. לכן נניח כי $m = 1$, $n = 2$. יש לנו

$$\begin{aligned} P_1 \subsetneq P_2 \subseteq P \\ Q_1 \subseteq B \end{aligned}$$

אידאלים ראשוניים, $Q_1 \cap A = P_1$. נתבונן בחוגים $\overline{B} = B/Q_1$, $\overline{A} = A/Q_1$. $\overline{B}$ שלם מעל $\overline{A}$ כאשר מזהים את $\overline{A}$ כתת חוג של $\overline{B}$. כמובן, $\overline{P_2} = P_2/P_1$ הוא אידאל ראשוני של

$\overline{A}$. לכן יש אידאל ראשוני של $\overline{B}$ שמונח מעל $\overline{P_2}$. כלומר, יש אידאל ראשוני $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq B$ כך שמתקיים

$$\overline{Q_2} \cap \overline{A} = \overline{P_2}$$

כאשר $\overline{Q_2} = Q_2/Q_1$. נקבל

$$Q_2/Q_1 \cap (A + Q_1)/Q_1 = (P_2 + Q_1)/Q_1$$

זה שקול לכך שמתקיים

$$Q_2 \cap (A + Q_1) = P_2 + Q_1$$

נותר להראות כי $Q_2 \cap A = P_2$. ברור כי $P_2 \subseteq Q_2 \cap A$, שכן $P_2 \subseteq P_2 + Q_1$, כלומר $P_2 \subseteq Q_2 \cap (A + Q_1)$. כעת נניח כי $y \in Q_2 \cap A$. אז בבירור, $y \in Q_2 \cap (A + Q_1) = P_2 + Q_1$. לכן נוכל לכתוב $y = p_2 + q_1$, כאשר $p_2 \in P_2, q_1 \in Q_1$. מכאן נקבל $q_1 \in A \cap Q_1 = P_1$. כיוון שמתקיים $P_1 \subseteq P_2$ נקבל $q_1 \in P_2$, ולכן $y \in P_2$. לכן סיימנו. ■

הגדרה 1.7 <u>מימד קרול</u> (Krull) של חוג A הוא הסופרימום של כל המספרים השלמים החיוביים n עוברם יש שרשרת עולה ממש של אידאלים ראשוניים:

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$$

דוגמאות

1. מימד קרול של שדה F הוא 0.
2. מימד קרול של תחום שלמות ראשי הוא 1 (כי כאן כל אידאל ראשוני שאינו 0 הוא מקסימלי).
3. משפט העלייה אומר שאם B חוג שלם מעל A אזי B בעל מימד סופי אם ורק אם A ממימד סופי, ואז $\dim A = \dim B$.

1.2 משפט הירידה

הגדרה 1.8 נתון תחום שלמות A. נאמר כי A <u>סגור בשלמות</u> אם A סגור בשלמות בשדה המנות שלו.

דוגמא ראינו כי $\mathbb{Z}$ סגור בשלמות. אותה הוכחה בדיוק מראה כי כל תחום פריקות יחידה סגור בשלמות. לכן, לכל שדה F, החוג $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ סגור בשלמות.

טענה 1.9 נתון תחום שלמות A. התכונות הבאות שקולות:

1. A סגור בשלמות.

2. A_P סגור בשלמות לכל אידאל ראשוני $P \subseteq A$.

3. A_m סגור בשלמות לכל אידאל מקסימלי $m \subseteq A$.

הוכחה: יהי F שדה המנות של A. נסמן בתור C את הסגור השלם של A בתוך F. ראינו כי לכל קבוצה כפלית S, הסגור השלם של $S^{-1}A$ בתוך $S^{-1}F = F$ הוא $S^{-1}C$.

$2 \Leftarrow 1$: A סגור בשלמות, ולכן $C = A$. עבור $S = A \backslash P$, P אידאל ראשוני של A, הסגור השלם של A_P בתוך F הוא $S^{-1}C = S^{-1}A = A_P$, ולכן A_P סגור בשלמות.

$3 \Leftarrow 2$: ברור, כל אידאל מקסימלי הוא בפרט ראשוני.

$1 \Leftarrow 3$: אנו יודעים כי C_m הוא הסגור השלם של A_m בתוך F (לכל אידאל מקסימלי $m \subseteq A$). לכן $C_m = A_m$. נסמן $\phi : A \hookrightarrow C$ ההכלה $\phi(x) = x$. זהו הומומורפיזם של חוגים, ולכן הומומורפיזם של מודלים מעל A. אזי $\phi_m : A_m \to C_m$ המוגדר על ידי $\frac{a}{s} \mapsto \frac{\phi(a)}{s} = \frac{a}{s}$ הוא גם הומומורפיזם של חוגים ובפרט הומומורפיזם של מודולים מעל A. מהנתון, ϕ_m על לכל m מקסימלי, ומטענה שראינו בעבר, נובע כי ϕ על, ולכן $C = A$, כלומר A סגור בשלמות. ■

הגדרה 1.10 בהינתן חוגים $A \subseteq B$ ואידאל $I \subseteq A$, נאמר כי $b \in B$ שלם מעל I אם קיימת משוואה

$$b^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i b^i = 0$$

כאשר לכל $0 \leq i \leq n-1$ מתקיים $a_i \in I$.

משפט 1.11 יהיו $A \subseteq B$ חוגים, ויהי $I \subseteq A$ אידאל. נסמן בתור C את הסגור השלם של A בתוך B, ונסמן $I_C = C \cdot I$ - האידאל של החוג C הנוצר על ידי I. אזי הסגור השלם של I בתוך B הוא $\sqrt{I_C} \subseteq C$. בפרט, הסגור השלם של I בתוך B סגור ביחס לחיבור וביחס לכפל (ואפילו ביחס לכפל באיברים שלמים מעל A כלשהם).

הוכחה: יהי $b \in B$ שלם מעל I. לכן יש משוואה

$$b^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i = 0$$

לכן

$$b^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i \in I \cdot C = I_C$$

ולכן $b \in \sqrt{I_C}$.

להיפך, נניח כי $b \in \sqrt{I_C}$, כלומר קיים n טבעי עבורו $b^n \in I_C$. נכתוב

$$b^n = \sum_{i=1}^{r} a_i b_i$$

כאשר $a_i \in I, b_i \in C$. נסמן $M = A\left[b_1, \dots, b_r\right]$ מודול נוצר סופית מעל A. אזי

$$b^n M = \sum_{i=1}^{r} a_i b_i M \subseteq IM$$

אם נגדיר $\phi : M \to M$ על ידי $\phi\left(u\right) = b^n u$, נקבל הומומורפיזם של מודולים מעל A, וכן $\phi\left(M\right) \subseteq IM$ - והוכחנו במקרה כזה כי ϕ מקיים משוואה מהצורה

$$\phi^N + \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \phi^i = 0$$

עבור $\alpha_i \in I$. נציב $1 \in M$:

$$b^{nN} + \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i b^{ni} = 0$$

ולכן b שלם מעל I. ■

משפט 1.12 נתונים שני תחומי שלמות $A \subseteq B$. יהי F שדה המנות של A. נניח כי A סגור בשלמות, ויהי $I \subseteq A$ אידאל. יהי $b \in B$ שלם מעל I. אזי b אלגברי מעל F והפולינום המינימלי של b מעל F הוא בעל מקדמים מתוך $\sqrt{I}$ (פרט לעליון).

הוכחה: כמובן, b אלגברי מעל F. ידוע כי החוג $F\left[b\right]$ הוא שדה. יהי $g\left(t\right) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ הפולינום המינימלי של b מעל F. יהי K שדה הפיצול של הפולינום $g\left(t\right)$ מעל F. נסמן $b_1 = b, b_2, \dots, b_n \in K$ את כל שורשי $g\left(t\right)$. נתבונן בשדות החלקיים $F\left[b_i\right] \subseteq K$, שידוע שכולם איזומורפיים מעל F:

$$\sigma_i : F\left[b\right] \to F\left[b_i\right]$$
$$\sigma_i\left(b\right) = b_i$$

מכאן נקבל כי כל b_i שלם מעל I, וכולם מקיימים את המשוואה מעל I שקיים b: אם

$$f\left(t\right) = t^m + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j$$

באשר $\alpha_j \in I$, עם $f\left(b\right) = 0$, אזי

$$0 = \sigma_i\left(f\left(b\right)\right) = f\left(b_i\right)$$

מתקיים $g\left(b_i\right) = 0$ ולכן $b_1, \dots, b_n$ שלמים (אלגבריים) מעל F.

$$g\left(t\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(t - b_i\right)$$

ניתן להביע את מקדמי $g(t)$ באמצעות פולינומים עם מקדמים שלמים של השורשים $b_1,\ldots,b_n$ (הפולינומים הסימטריים האלמנטריים):

$$\begin{aligned} b_1+\cdots+b_n &= -a_{n-1} \\ (-1)^n b_1\cdots b_n &= a_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$a_i\in F$ שלמים מעל A (כי הם שלמים מעל I) ולכן שייכים לסגור השלם של A בתוך F - אבל A סגור בשלמות, ולכן $a_i\in A$. לכן נסיק כי $a_0,\ldots,a_{n-1}\in A$ הם שלמים מעל I. מהמשפט הקודם, היות והחוג A שלם, מתקיים $C=A$, כלומר $I_C=I$, ונקבל כי $a_0,\ldots,a_{n-1}\in\sqrt{I_C}=\sqrt{I}$. ■