אלגברה ב3

ארזים ©

26 בדצמבר 2016

1 חוגי נתר

בשיעור שעבר ראינו כי אם R חוג נתר אזי כל אידאל מכיל חזקה של הרדיקל שלו.

מסקנה 1.1 יהי R חוג נתר, ויהי m אידאל מקסימלי. התנאים הבאים שקולים עבור אידאל כלשהו Q:

1. Q פרימרי ביחס לאידאל m.
2. $\sqrt{Q} = m$.
3. קיים n טבעי עבורו $m^n \subseteq Q \subseteq m$.

הוכחה: $1 \Rightarrow 2$: ברור מההגדרה.
$2 \Rightarrow 1$: הוכחנו בעבר.
$2 \Rightarrow 3$: כיוון שנתון כי R הוא חוג נתר, יש n טבעי עבורו $\sqrt{Q}^n = m^n \subseteq Q$, ולכן $m^n \subseteq Q \subseteq m$.
$3 \Rightarrow 2$: $m = \sqrt{m^n} \subseteq \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{m} = m$, ולכן $\sqrt{Q} = m$. ■

הגדרה 1.2 יהיה R חוג ויהי $I \subsetneq R$ אידאל. I ייקרא <u>אי פריק</u> אם אי אפשר להציג את I באופן לא טריוויאלי כחיתוך של שני אידאלים, כלומר

$$I = J_1 \cap J_2 \Rightarrow I \in \{J_1, J_2\}$$

טענה 1.3 יהי R חוג נתר, ויהי $I \subsetneq R$ אידאל. אזי אפשר לכתוב את I כחיתוך סופי של אידאלים אי פריקים.

הוכחה: נניח בשלילה שיש אידאל שאינו ניתן להצגה כמו בטענה. נתבונן בקבוצה S של כל האידאלים החלקיים ממש לחוג R שאינם ניתנים להצגה כמו בטענה. מההנחה שלנו, $S \neq \emptyset$. כיוון שנתון כי R חוג נתר, יש בקבוצה S איבר מקסימלי I. I אינו אי פריק, ולכן יש אידאלים $I \supseteq J_1, J_2$ המקיימים $I = J_1 \cap J_2$. ממקסימליות I בקבוצה S, מתקיים $J_1, J_2 \notin S$. לכן כל אחד מהם ניתן לכתוב כחיתוך סופי של אידאלים אי פריקים, ואז גם את I ניתן לכתוב כך (החיתוך בין שניהם), בסתירה, כי $I \in S$. ■

משפט 1.4 בחוג נתר R, כל אידאל אי פריק I הוא פרימרי.

הוכחה: מהנתון נובע כי במנה R/I, שהיא חוג נתר, אידאל האפס $\overline{0}$ הוא אי־פריק. אם נוכיח כי $\overline{0}$ פרימרי, אזי I אידאל פרימרי בחוג R. לכן אפשר להניח כי $\{0\}$ הוא אידאל אי פריק.

כעת, נניח כי $xy = 0$. אם $y \neq 0$, יש להראות כי יש n טבעי עבורו $x^n = 0$. נתבונן בשרשרת

$$\mathrm{Ann}_R(x) \subseteq \mathrm{Ann}_R(x^2) \subseteq \ldots$$

השרשרת הזו מתייצבת, נניח באינדקס n, כלומר $\mathrm{Ann}_R(x^n) = \mathrm{Ann}_R(x^{n+1}) = \ldots$.
נוכיח כי $Rx^n \cap Ry = 0$. נניח כי a בחיתוך הזה, אזי

$$a = bx^n = cy$$

כעת, $cyx = c \cdot 0 = 0$, אבל

$$0 = cyx = bx^{n+1}$$

כלומר $b \in \mathrm{Ann}_R(x^{n+1}) = \mathrm{Ann}_R(x^n)$, לכן $a = bx^n = 0$.

לכן כתבנו את 0 כחיתוך של שני אידאלים ־ כיוון שהנחנו שהוא אי פריק, מתקיים $Ry = 0$ או $Rx^n = 0$. $Ry \neq 0$ כי $y \neq 0$, ולכן $Rx^n = 0$, כלומר $x^n = 0$. לכן 0 אכן אידאל פרימרי, וסיימנו. ■

משפט 1.5 בחוג נתר R, לכל אידאל $I \subsetneq R$ יש פירוק פרימרי.

הוכחה: ברור מהמשפט הקודם ומהטענה שלפניו. ■

ניזכר שבחוג כללי R ראינו את משפט היחידות הראשון לפירוק פרימרי: אם לוקחים פירוק פרימרי מינימלי

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$$

ונסמן $\sqrt{Q_i} = P_i$, אזי $\{P_i\}$ היא בדיוק קבוצת כל האידאלים הראשוניים מבין $\left\{\sqrt{(I:x)} \mid x \in R\right\}$. בחוגי נתר יש שיפור קטן שניתן לבצע.

משפט 1.6 יהי R חוג נתר ויהי $I \subsetneq R$ אידאל. אז כל האידאלים הראשוניים השייכים לאידאל I הם בדיוק כל האידאלים הראשוניים המופיעים בקבוצה $\{(I:x) \mid x \in R\}$.

הוכחה: נניח כי $I = \bigcap Q_i$ פירוק פרימרי מינימלי. נסמן $\overline{0}$ את אידאל האפס בחוג R/I. אזי

$$\overline{0} = \bigcap Q_i/I = \bigcap \overline{Q_i}$$

הוא פירוק פרימרי מינימלי של אידאל האפס בחוג R/I. נסמן $P_i = \sqrt{Q_i}$, אזי $\overline{P_i} = P_i/I = \sqrt{\overline{Q_i}}$. $\overline{P_1}, \ldots, \overline{P_n}$ הם האידאלים הראשוניים השייכים לאידאל $\overline{0}$. ראינו גם כי

$$\left(\overline{0} : x + I\right) = (I : x) \big/ I$$

ולכן אפשר להניח כי $I = 0$.
כעת, נתון כי

$$\bigcap_{i=1}^{n} Q_i = 0$$

פירוק פרימרי מינימלי, עם $P_i = \sqrt{Q_i}$. נסמן

$$A_i = \bigcap_{i \neq j=1}^{n} Q_j \neq 0$$

יהי $0 \neq x \in A_i$, אזי

$$x \in A_i \backslash Q_i$$

וזאת שכן $A_i \cap Q_i = 0$.
במקרה הזה ראינו כי

$$\sqrt{\mathrm{Ann}_R x} = \sqrt{(0 : x)} = \bigcap_{j=1}^{n} \sqrt{(Q_j : x)} = \sqrt{(Q_i : x)} = P_i$$

ובפרט, $\mathrm{Ann}_R x \subseteq P_i$ לכל $0 \neq x \in A_i$.
כיוון שנתון כי R חוג נתר, יש m טבעי עבורו מתקיים

$$Q_i \supseteq P_i^m$$

לכן, נובע כי

$$A_i P_i^m \subseteq A_i \cap P_i^m \subseteq A_i \cap Q_i = 0$$

כלומר $A_i P_i^m = 0$. יהי m_i הטבעי המינימלי עבורו $A_i P_i^{m_i} = 0$, כלומר $A_i P_i^{m_i - 1} \neq 0$.
יהי $0 \neq x' \in A_i P_i^{m_i - 1}$. אזי $x' P_i = 0$, ולכן

$$P_i \subseteq \mathrm{Ann}_R\left(x'\right) \subseteq P_i$$

ולכן נקבל כי $P_i = \mathrm{Ann}_R x = (0:x)$. לכן כל P_i הוא אכן מהצורה $(0:x)$ עבור x כלשהו.

בכיוון השני, יהי $x \in R$ עבורו $(0:x) = P$ אידאל ראשוני. אזי $\sqrt{(0:x)} = \sqrt{P} = P$, ולכן P אידאל השייך לאידאל האפס, כלומר בקבוצה $\{P_1, \ldots, P_n\}$. ■

למה 1.7 בחוג R, שני אידאלים I, J הם זרים אם ורק אם $\sqrt{I}, \sqrt{J}$ זרים.

הוכחה: נניח כי $\sqrt{I} + \sqrt{J} = R$. אזי

$$\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} = \sqrt{R} = R$$

לכן $1 \in \sqrt{I+J}$, ואז יש n טבעי עבורו $1^n = 1 \in I + J$, כלומר $I + J = R$ והם זרים.

בכיוון השני, אם $I + J = R$, אזי $R = I + J \subseteq \sqrt{I} + \sqrt{J}$, כלומר $\sqrt{I} + \sqrt{J} = R$ וסיימנו. ■

משפט 1.8 יהי R חוג נתר שבו כל אידאל ראשוני שאינו 0 הוא מקסימלי. אזי לכל אידאל $0 \neq I \subsetneq R$ יש הצגה בצורה

$$I = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \cdots \cdot Q_n$$

כאשר $Q_1, \ldots, Q_n$ אידאלים פרימריים זרים בזוגות, וההצגה הזו היא יחידה עד כדי שינוי סדר.

הוכחה: יש לאידאל I פירוק פרימרי מינימלי

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$$

נסמן $P_i = \sqrt{Q_i}$. לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $P_i \neq 0$, ואלה הם אידאלים ראשוניים שונים זה מזה. לכן $\{P_1, \ldots, P_n\}$ הם אידאלים מקסימליים שונים זה מזה, ובפרט זרים זה לזה.

מהלמה הקודמת נקבל כי $Q_1, \ldots, Q_n$ זרים זה לזה, ואז ראינו כי

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i = \prod_{i=1}^{n} Q_i$$

לכן נותר רק להוכיח כי ההצגה הזו יחידה.

נניח כי

$$I = \prod_{i=1}^{m} Q_i'$$

עבור Q_i' פרימריים זרים בזוגות. אזי

$$I = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i'$$

פירוק פרימרי. נראה כי זהו פירוק מינימלי.

כיוון שלכל $i \neq j$ האידאלים Q_i', Q_j' זרים, גם הרדיקלים $P_i' = \sqrt{Q_i'}, P_j' = \sqrt{Q_j'}$ הם זרים, ובפרט שונים זה מזה לכל $i \neq j$.

כעת, נניח כי

$$Q_i' \supseteq \bigcap_{i \neq j=1}^{m} Q_j'$$
$$P_i' \supsetneq \bigcap_{i \neq j=1}^{m} \sqrt{Q_j'} = \bigcap_{i \neq j=1}^{m} P_j'$$

לכן יש $i \neq j$ עבורו $P_j' \subseteq P_i'$, וזה לא ייתכן, כי P_i', P_j' זרים.

ממשפט היחידות הראשון נקבל

$$\{P_1, \ldots, P_n\} = \{P_1', \ldots, P_m'\}$$

ולכן $m = n$, ולאחר סידור מחדש נוכל להניח כי $P_i' = P_i$. כיוון שהאידאלים $P_1, \ldots, P_n$ הם מקסימליים ושונים זה מזה, כל אחד מהם גם מינימלי בקבוצה $\{P_1, \ldots, P_n\}$.

ממשפט היחידות השני, כיוון שמתקיים

$$\sqrt{Q_i'} = \sqrt{Q_i} = P_i$$

נקבל כי

$$Q_i' = Q_i$$

לכל i. ■

משפט 1.9 (משפט הבסיס של הילברט) אם R הוא חוג נתר, אז גם $R[x]$ הוא חוג נתר.

הוכחה: יהי $0 \neq J \subseteq R[x]$ אידאל, ונראה כי J נוצר סופית. תהי $I \subseteq R$ תת הקבוצה המורכבת מהאיברים הבאים: $0 \in R$, יחד עם כל המקדמים העליונים של כל הפולינומים השונים מאפס באידאל J.

$I \subseteq R$ אידאל: אם $a, b \in I$, ניתן להניח $a, b \neq 0$ ואז

$$J \ni f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a x^n$$
$$J \ni g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{m-1} x^{m-1} + b x^m$$

נניח בלי הגבלת הכלליות $m \geq n$. אזי $x^{n-m}g(x) \in J$, ואז

$$J \ni f(x) + x^n g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + (a+b)\, x^n$$

לכן $a+b \in I$ (אם $a+b=0$ אין מה להוכיח, אחרת ־ ראינו שזה מקדם עליון של פולינום מסויים). באופן דומה מראים סגירות לכפל באיברי r.
כיוון שנתון כי R חוג נתר, I הוא אידאל נוצר סופית:

$$I = Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n$$

כאשר $a_i \neq 0$ לכל i. יהיו $f_i(x) \in J$ עבורם המקדמים העליונים הם בדיוק a_i. נסמן

$$r_i = \deg(f_i(x))$$
$$r = \max_{1\leq i\leq n} r_i$$

יהי $J' \subseteq J$ האידאל הנוצר על ידי $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$. כעת, נראה כי לכל $f(x) \in J$ יש הצגה בצורה

$$f(x) = h(x) + g(x)$$

כאשר $g(x) \in J', \deg h(x) < r$.
יהי $f(x) \in J$. אם $\deg f(x) < r$, נקח $g(x) = 0$. אחרת, $\deg f(x) \geq r$, ולכן

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m$$

כאשר $\alpha_m \in I$. ניתן לכתוב

$$\alpha_m = u_1 a_1 + \cdots + u_n a_n$$

אזי נתבונן בפולינום הבא:

$$f(x) - \left(u_1 x^{m-r_1} f_1(x) + u_2 x^{m-r_2} f_2(x) + \cdots + u_n x^{m-r_n} f_n(x)\right)$$

המחסר כאן הוא מתוך האידאל J', וההפרש כולו מדרגה קטנה מאשר m ־ המקדם של x^m מתאפס. לכן באינדוקציה נקבל את הדרוש.
נסמן $M = R\cdot 1 + Rx + \cdots + Rx^r \subseteq R[x]$. זהו תת מודול של $R[x]$ מעל R (שנוצר סופית מעל R).
הראינו כי

$$J = J \cap M + J'$$

$J \cap M$ הוא תת מודול מעל R של M, שהוא מודול נתר מעל R (כמודול נוצר סופית מעל חוג נתר R). לכן $J \cap M$ הוא תת מודול נוצר סופית מעל R. נניח כי

$$J \cap M = R\varphi_1(x) + \cdots + R\varphi_k(x)$$

כאשר $\deg \varphi_i(x) \leq r$. אזי

$$J = \sum_{i=1}^{k} R\varphi_i + \sum_{i=1}^{n} R[x] f_i(x) = \sum_{i=1}^{k} R[x] \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{n} R[x] f_i(x)$$

ולכן J נוצר סופית. לכן כל אידאל של $R[x]$ הוא נוצר סופית, ולכן $R[x]$ חוג נתר. ■

מסקנה 1.10 יהי R חוג נתר. אז גם $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ חוג נתר.

הוכחה:

$$R[x_1, \ldots, x_n] = R[x_1][x_2] \ldots [x_n]$$

■

בפרט, החוג $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ הוא חוג נתר, וכן לכל שדה $\mathbb{F}$, החוג $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ הוא חוג נתר.

מסקנה 1.11 אלגברה נוצרת סופית מעל חוג נתר היא חוג נתר. בפרט, כל חוג נוצר סופית הוא חוג נתר.

הוכחה: נניח כי A היא אלגברה נוצרת סופית מעל חוג נתר R. אזי A היא תמונה הומומורפית של $R[x_1, \ldots, x_n]$, עבור n מתאים (כמות היוצרים של A), וזהו חוג נתר - לכן גם A חוג נתר.

אם R חוג נוצר סופית, אזי R הוא תמונה הומומורפית של $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ עבור n מתאים, ובפרט חוג נתר. ■

2 הרחבות שלמות

2.1 הסגור השלם

הגדרה 2.1 נתונים חוגים $A \subseteq B$. יהי $b \in B$. נאמר כי b שלם מעל A אם יש משוואה מתוקנת

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = 0$$

כאשר $a_i \in A$ לכל $1 \leq i \leq n-1$.

נניח כי $x \in B$ שלם מעל A, כלומר

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

אזי

$$x^n \in A + Ax + \cdots + Ax^{n-1}$$

וכן קל לראות כי לכל $j \geq 0$ מתקיים

$$x^{n+j} \in \sum_{i=0}^{n-1} Ax^i$$

כלומר, תת החוג $A\left[x\right]$ של B, שנוצר על ידי A, x, מקיים

$$A\left[x\right] = \sum_{i=0}^{n-1} Ax^i$$

ואגף ימין הוא תת מודול של B מעל A שנוצר סופית.
לכן אם $x \in B$ שלם מעל A, אזי תת החוג $A\left[x\right] \subseteq B$ נוצא סופית כמודול מעל A.