אלגברה ב3

ⓒ ארזים

22 בדצמבר 2016

1 חוגי ארטין

ראינו כבר את הטענה הבאה:

טענה 1.1 יהי R חוג ארטין. אזי כל אידאל רשוני של R הוא מקסימלי.

מסקנה 1.2 בחוג ארטין R מתקיים $\mathcal{N}\left(R\right)=\mathcal{J}\left(R\right)$.

טענה 1.3 בחוג ארטין R יש מספר סופי של אידאלים מקסימליים (אומרים גם סמי מקומי).

הוכחה: נתבונן בקבוצת החיתוכים הסופיים של אידאלים מקסימליים. זו קבוצת אידאלים של R, ולכן יש איבר מינימאלי. יהי $m_1\cap\ldots\cap m_n$ האיבר המינימלי הזה. לכן לכל m אידאל מקסימלי של R מתקיים

$$m_1\cap\ldots\cap m_n\cap m=m_1\cap\ldots\cap m_n$$

לכן

$$m_1\cap\ldots\cap m_n\subseteq m$$

לכן קיים $1\leq i\leq n$ כך שמתקיים $m_i\subseteq m$, אבל m_i מקסימלי, ולכן $m=m_i$. לכן $\{m_1,\ldots,m_n\}$ היא קבוצת כל האידאלים המקסימליים של R. ∎

טענה 1.4 יהי R חוג ארטין. אזי $\mathcal{N}\left(R\right)$ הוא אידאל נילפוטנטי, כלומר קיים n עבורו $\mathcal{N}\left(R\right)^n=0$.

הוכחה: נתבונן בסדרה היורדת הבאה:

$$\mathcal{N}\left(R\right)\supseteq\mathcal{N}\left(R\right)^2\supseteq\ldots$$

הסדרה מתייצבת, נניח באינדקס n. נסמן $I=\mathcal{N}\left(R\right)^n$, ונרצה להראות $I=0$.
אם לא, נתבונן בקבוצה Σ של האידאלים J עבורם $I\cdot J\neq0$. זו קבוצה לא ריקה, שכן $R\in\Sigma$.

לכן יש איבר מינימלי של Σ. נסמן אותו T. אזי $TI \neq 0$. אזי יש $0 \neq x \in T$ עבורו $RxI = xI \neq 0$. אבל $Rx \subseteq T$, ולכן $T = Rx$. כעת, $xI \subseteq Rx$. כמו כן

$$xI \cdot I = xI \neq 0$$

לכן $xI = Rx$, ממינימליות. לכן קיים $y \in I$ עבורו $xy = x$. לכן $x\left(1-y\right) = 0$.

$$y \in I = \mathcal{N}\left(R\right)^n \subseteq \mathcal{N}\left(R\right) = \mathcal{J}\left(R\right)$$

לכן $1 - y \in R^\times$, ולכן $x = 0$, בסתירה. ■

טענה 1.5 יהי R חוג כך שאפשר להציג את 0 כמכפלת אידאלים מקסימליים (לאו דווקא שונים). אזי R חוג נתר אם ורק אם R חוג ארטין.

הוכחה: נתבונן בשרשרת

$$R \supseteq m_1 \supseteq m_1 m_2 \supseteq \ldots \supseteq m_1 \cdots m_{n-1} \supseteq m_1 \cdots m_n = 0$$

כל מנה עוקבת

$$V_i = \left(m_1 \cdots m_{i-1}\right) \big/ \left(m_1 \cdots m_{i-1} m_i\right)$$

היא מודול מעל $\mathbb{F}_i = R \big/ m_i$ שהוא שדה. כמו כן, על ידי צמצום סקלרים, V_i הוא מודול מעל R המתאפס על ידי m_i. ברור כי V_i מודול נתר מעל $\mathbb{F}_i$ אם ורק אם הוא מודול ארטין מעל $\mathbb{F}_i$, אם ורק אם הוא מרחב וקטורי סוף מימדי.

נניח כי R חוג נתר (ארטין). $m_1 \cdots m_{i-1} \subseteq R$ אידאל, ולכן מודול נתר (ארטין) מעל R. לכן V_i מודול נתר (ארטין) מעל R (שמתאפס מעל m_i). לכן V_i מודול נתר (ארטין) מעל $\mathbb{F}_i$, ולכן V_i הוא מודול ארטין (נתר) מעל $\mathbb{F}_i$. כעת, V_n וגם $V_{n-1} = \left(m_1 \cdots m_{n-1}\right) \big/ V_n$ מודולי ארטין (נתר) מעל R, ולכן גם $m_1 \cdots m_{n-1}$ מודול ארטין (נתר). באופן דומה נוכל להוריד עוד ועוד m_i ולבסוף לקבל כי m_1 מודול ארטין (נתר). כיוון שמתקיים $\mathbb{F}_1 = R \big/ m_1$ שדה, אזי הוא מודול ארטין (נתר) מעל R. לכן R הוא ארטין (נתר) כמודול מעל R, כלומר חוג ארטין (נתר), שכן

$$0 \to m_1 \to R \to \mathbb{F}_1 \to 0$$

סדרה מדוייקת. ■

משפט 1.6 יהי R חוג ארטין. אזי R חוג נתר.

הוכחה: ראינו כי כל אידאל ראשוני בחוג R הוא מקסימלי, ויש מספר סופי מהם. נכתוב

$$\left\{m_1, \ldots, m_n\right\} = \max \operatorname{Spec}\left(R\right)$$

האידאלים המקסימליים. אזי

$$\mathcal{N}\left(R\right)=\mathcal{J}\left(R\right)=\bigcap_{i=1}^{n}m_{i}$$

כמו כן, $\mathcal{N}\left(R\right)^{k}=0$ עבור k כלשהו. כעת,

$$\prod_{i=1}^{n}m_{i}^{k}=\left(\prod_{i=1}^{n}m_{i}\right)^{k}\subseteq\left(\bigcap_{i=1}^{n}m_{i}\right)^{k}=\mathcal{J}\left(R\right)^{k}=\mathcal{N}\left(R\right)^{k}=0$$

ולכן מהטענה האחרונה R הוא חוג נתר. ■

2 חוגי נתר

טענה 2.1 יהי M מודול מעל חוג R. M הוא מודול נתר אם ורק אם כל תת מודול שלו נוצר סופית.

הוכחה: נניח כי M הוא מודול נתר מעל R. יהי $N\subseteq M$ תת מודול. תהי Σ קבוצת כל תת המודולים של N שנוצרים סופית. Σ לא ריקה, כי $0\in\Sigma$, ולכן יש בה איבר מקסימלי שנסמנו N_0. נוכיח $N=N_0$.

אחרת, קיים $n\in N\backslash N_0$, ואז

$$N_0\subsetneq N_0+Rn$$

אבל אגף ימין נוצר סופית, בסתירה למקסימליות של N_0. לכן N נוצר סופית.

יהי M כך שכל תת מודול שלו נוצר סופית. תהי $M_1\subseteq M_2\subseteq\ldots$ שרשרת עולה של תת מודולים של M. נסמן

$$M>N=\bigcup_{i}M_{i}$$

תהי L קבוצה סופית היוצרת את N. לכן קיים j עבורו $L\subseteq M_j$. אזי

$$M_j=M_{j+1}=M_{j+2}=\ldots$$

ולכן הסדרה מתייצבת, כלומר M מודול נתר. ■

מסקנה 2.2 יהי R חוג ראשי. אזי R חוג נתר.

טענה 2.3 בחוג נתר, כל אידאל מכיל חזקה של הרדיקל שלו.

הוכחה:

$$R \rhd \sqrt{I} = Rx_1 + \ldots + Rx_n$$

כעת, $x_i \in \sqrt{I}$, ולכן יש r_i עבורו $x_i^{r_i} \in I$. יהי $m \le r_1 + \ldots + r_n$. האידאל $\left(\sqrt{I}\right)^m$ נוצר על ידי $x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$, כאשר

$$l_1 + \ldots + l_n = m$$

אזי $1 \le i \le n$ כך שמתקיים $l_i \ge r_i$, ולכן יש $x_i^{l_i} \in I$, ולכן $\left(\sqrt{I}\right)^m \subseteq I$. ■

מסקנה 2.4 בחוג נתר R, הרדיקל הנילי הוא אידאל נילפוטנטי.

הוכחה: יהי m כך שמתקיים

$$\left(\sqrt{0}\right)^m \subseteq 0$$

לכן $\left(\sqrt{0}\right)^m = \mathcal{N}(R)^m = 0$. ■