אגלברה ב3

ארזים ©

19 בדצמבר 2016

1 פירוק פרימרי

1.1 לוקליזציות

אנחנו עובדים בחוג R עם קבוצה כפלית $S \subseteq R$. ניקח $Q \subseteq R$ אידאל פרימרי, $P = \sqrt{Q}$ אידאל ראשוני.

באופן כללי, מתקיים $Q \cap S = \emptyset$ אם ורק אם $P \cap S = \emptyset$. אם $P \cap S \neq \emptyset$ אזי $S^{-1}Q = S^{-1}R$. נניח כי $P \cap S = \emptyset$, ונראה כי $S^{-1}Q \subseteq S^{-1}R$ הוא אידאל פרימרי ביחס לאידאל הראשוני $S^{-1}P$.

$$\sqrt{S^{-1}Q} = S^{-1}\sqrt{Q} = S^{-1}P$$

כעת, נניח כי $\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} \in S^{-1}Q$, ונכתוב $\frac{xy}{st} = \frac{q}{z}$. לכן יש $u \in S$ עבורו

$$u\left(xyz - qst\right) = 0$$
$$\left(xy\right)\left(zu\right) = qstu \in Q$$

כמובן $zu \in S$, וכיוון שמתקיים $Q \cap S = \emptyset$, בהכרח $zu \notin Q$. בעצם $zu \notin \sqrt{Q} = P$, שכן $P \cap S = \emptyset$. כיוון שהאידאל Q פרימרי, $xy \in Q$. כעת, נניח כי $\frac{x}{s} \notin S^{-1}Q$, כלומר $x \notin Q$. נסיק כי $y \in \sqrt{Q} = P$, כלומר $\frac{y}{t} \in S^{-1}P = \sqrt{S^{-1}Q}$.

כעת נסמן בתור f את ההומומורפיזם $r \in R \mapsto \frac{r}{1}$. אזי מתקיים

$$f^{-1}\left(S^{-1}Q\right) = \bigcup_{s \in S}\left(Q : s\right)$$

כעת, כיוון שמתקיים $s \notin \sqrt{Q} = P$ לכל $s \in S$, אנו יודעים כי $\left(Q : s\right) = Q$, כלומר

$$f^{-1}\left(S^{-1}Q\right) = Q$$

טענה 1.1 יש התאמה חד־חד־ערכית ועל בין האידאלים הפרימרי של $S^{-1}R$ לבין האידאלים הפרימרים של R שזרים לקבוצה S. ההתאמה היא:

$$Q \mapsto S^{-1}Q$$
$$f^{-1}\left(J\right) \leftarrow J$$

הוכחה: את הכיוון $\mapsto$ ראינו. בכיוון ההפוך, אם $J \subseteq S^{-1}R$ אידאל פרימרי אזי $f^{-1}(J)$ אידאל פרימרי של R. ■

טענה 1.2 יהי $I \subseteq R$ אידאל פריק. נניח כי

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$$

פירוק פרימרי מינימלי. נסמן $P_i = \sqrt{Q_i}$. תהי $S \subseteq R$ קבוצה כפלית, ונניח כי לכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים $P_i \cap S = \emptyset$, ולכל $m+1 \leq i \leq n$ מתקיים $P_i \cap S \neq \emptyset$. אזי

$$S^{-1}I = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}Q_i$$

וכן

$$f^{-1}\left(S^{-1}I\right) = \bigcap_{i=1}^{m} Q$$

ואלה הם פירוקים פרימריים מינימליים.

הוכחה:

$$S^{-1}I = S^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} S^{-1}Q_i = \bigcap_{i=1}^{m} S^{-1}Q_i$$

נראה כי פירוק זה הוא מינימלי. הרדיקלים הם $\sqrt{S^{-1}Q_i} = S^{-1}\sqrt{Q_i} = S^{-1}P_i$. כיוון שההתאמה $P \to S^{-1}P$ היא התאמה חד־חד־ערכית ועל בין האידאלים הראשוניים של R שזרים לקבוצה S לבין האידאלים הראשוניים של חוג השברים, נקבל כי $S^{-1}P_i \neq S^{-1}P_j$ לכל $1 \leq i \neq j \leq m$.
אם

$$\bigcap_{i \neq j=1}^{m} S^{-1}Q_j \supseteq S^{-1}Q_i$$

אזי

$$Q_i = f^{-1}\left(S^{-1}Q_i\right) \supseteq \bigcap_{i \neq j=1}^{m} f^{-1}\left(S^{-1}Q_j\right) = \bigcap_{i \neq j=1}^{m} Q_j$$

בסתירה למינימליות הפירוק של I. כמובן

$$f^{-1}\left(S^{-1}I\right) = \bigcap_{i=1}^{m} f^{-1}\left(S^{-1}Q_i\right) = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$$

וזהו כמובן פירוק מינימלי. ■

1.2 משפט היחידות השני

הגדרה 1.3 יהי I אידאל פריק, ותהי Σ קבוצת אידאלים ראשוניים השייכים לאידאל I. נאמר כי Σ קבוצה מבודדת אם לכל P' אידאל ראשוני השייך לאידאל I עבורו קיים $P \in \Sigma$ המכיל את P', מתקיים $P' \in \Sigma$.

דוגמאות

1. Σ שהיא קבוצת כל האידאלים הראשוניים השייכים לאידאל I.
2. Σשהיא קבוצת כל האידאלים הראשוניים המינימליים השייכים לאידאל I (כל קבוצה חלקית של Σ גם כן מבודדת).
3. Σ שהיא סינגלטון $\{P\}$ עבור אידאל ראשוני מינימלי P השייך לאידאל I.

משפט 1.4 (משפט היחידות השני של הפירוק הפרימרי) יהי $I \subseteq R$ אידאל פריק, ויהי

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$$

פירוק פרימרי מינימלי. נסמן $P_i = \sqrt{Q_i}$. תהי Σ קבוצה מבודדת של אידאלים ראשוניים השייכים לאידאל I, ונסמן

$$\Sigma = \{P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\}$$

אזי החיתוך

$$\bigcap_{j=1}^{k} Q_{i_j}$$

נקבע באופן יחיד על ידי בחירת Σ.

הוכחה: נגדיר

$$S = R \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{k} P_{i_j} \right) = \bigcap_{j=1}^{k} \left(R \backslash P_{i_j} \right)$$

זאת קבוצה כפלית, כחיתוך של הקבוצות הכפליות $R \backslash P_{i_j}$. כמובן, לכל $1 \leq j \leq k$ מתקיים $P_{i_j} \cap S = \emptyset$, ולכל אינדקס אחר r מתקיים $P_r \cap S \neq \emptyset$, שכן

$$P_r \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{k} P_{i_j}$$

אחרת, אז יש $1 \leq j \leq k$ מסויים עבורו $P_r \subseteq P_{i_j}$. לכן, היות ולקחנו את Σ כקבוצה מבודדת, זה אומר $P_r \in \Sigma$, בסתירה.

כעת, מהטענה הקודמת

$$f^{-1}\left(S^{-1}I\right)=\bigcap_{i=1}^{k}Q_{i_j}$$

כעת, אגף שמאל לא תלוי בפירוק הפרימרי שבחרנו, אלא רק באידאל I, ולכן גם אגף ימין, כמו שרצינו. ■

כמקרה פרטי נקבל את המסקנה הבאה:

מסקנה 1.5 בסימונים שלעיל, האידאלים הפרימריים Q_i כך שהרדיקלים שלהם P_i אידאל ראשוני מינימלי השייך לאידאל I נקבעים באופן יחיד על ידי I.

2 תנאי שרשרת

2.1 הגדרות ומושגים בסיסיים

למה 2.1 תהי $(\Sigma,\preceq)$ קבוצה בעלת סדר חלקי. התנאים הבאים שקולים:

1. כל סדרה אינסופית ועולה מתוך Σ מתייצבת, כלומר אם $x_1\preceq x_2\preceq\cdots\preceq x_n\preceq\ldots$ אזי יש אינדקס r כך שלכל i מתקיים $x_r=x_{r+i}$.
2. בכל תת קבוצה של Σ יש איבר מקסימלי.

הוכחה: $1\Rightarrow 2$: נניח בשלילה כי יש תת קבוצה $A\subseteq\Sigma$ שאין בה איבר מקסימלי. נבחר $x_1\in A$. איבר זה לא מקסימלי, ולכן $x_1\precneqq x_2\in A$, וכך נוכל להמשיך, משום שאין איבר מקסימלי. נקבל סדרה עולה

$$x_1\precneqq x_2\precneqq x_3\precneqq\cdots\precneqq x_n\precneqq\ldots$$

מתנאי 1, הסדרה מתייצבת, וזאת סתירה.
$2\Rightarrow 1$: תהי סדרה עולה מתוך Σ. יש איזשהו x_n שהוא מקסימלי, ואז בבירור $x_{n+i}=x_n$ לכל i. ■

הגדרה 2.2 יהי M מודול מעל R. תהי Σ קבוצת כל המודולים החלקיים למודול M, מסודרת ביחס להכלה.
אם Σ מקיימת את התכונות שבלמה, נאמר כי M <u>מודול נתר</u> (Noether) מעל R. אם החוג R הוא מודול נתר מעל R, נאמר כי R הוא <u>חוג נתר</u>.
כאשר מסדרים את Σ ביחס להכלה הפוכה ומתקיימים תנאי הלמה, נאמר כי M הוא מודול ארטין (Artin) מעל R. אם R הוא מודול ארטין מעל R, נאמר כי R הוא <u>חוג ארטין</u>.

דוגמא $\mathbb{Z}$ הוא חוג נתר. אם ניקח שרשרת עולה של אידאילים

$$\mathbb{Z}m_1\subseteq\mathbb{Z}m_2\subseteq\mathbb{Z}m_3\subseteq\cdots\subseteq\mathbb{Z}m_n\subseteq\ldots$$

אזי בהכרח מתקיים $m_1\mid m_2\mid m_3\mid\cdots\mid m_n$. למספר m_1 יש מספר סופי של

מחלקים, ולכן בהכרח שרשרת האידאלים תתייצב.
$\mathbb{Z}$ אינו חוג ארטין ־ יהי $a \geq 2$ מספר טבעי, אזי

$$\mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{Z}a \supsetneq \mathbb{Z}a^2 \supsetneq \dots$$

אותה דוגמא עובדת עבור $\mathbb{F}[x]$ מעל שדה $\mathbb{F}$.

טענה 2.3 תהי

$$0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$$

סדרה מדוייקת של מודולים מעל R. אזי M מודול נתר (ארטין) אם ורק אם M', M'' הם מודולי נתר (ארטין).

הוכחה: נניח כי M מודול נתר (ארטין). תהי $\{M'_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת עולה (יורדת) של תת מודולים של M'. לכן $\{\alpha(M'_i)\}_{i=1}^{\infty}$ היא שרשרת עולה (יורדת) של תת־מודולים של M, ולכן מתייצבת, נניח באינדקס n. כיוון שנתון כי α חד־חד־ערכית, גם

$$M'_{i+n} = M'_n$$

לכל i. לכן M' מודול נתר (ארטין).
אם $\{M''_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא שרשרת עולה (יורדת) של תת מודולים של M'', אזי גם $\{\beta^{-1}(M''_i)\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת כזאת של תת־מודולים של M, ולכן מתייצבת, נניח באינדקס n. נתון כי β על, ולכן

$$M''_{i+n} = \beta\left(\beta^{-1}\left(M''_{i+n}\right)\right) = \beta\left(\beta^{-1}M''_i\right) = M''_i$$

לכל i. לכן M'' מודול נתר (ארטין).
בכיוון ההפוך, נניח כי M', M'' מודולי נתר (ארטין). תהי $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ שרשרת עולה (יורדת) של תתי מודולים מעל M. נתבונן בשרשראות $\left\{\alpha^{-1}(M_i)\right\}_{i=1}^{\infty}$, $\{\beta(M_i)\}_{i=1}^{\infty}$, שגם הן עולות (יורדות), ולכן מתייצבות. נניח כי לכל $i \geq r$ מתקיים

$$\alpha^{-1}(M_i) = \alpha^{-1}(M_r)$$
$$\beta(M_i) = \beta(M_r)$$

נראה כי לכל $i \geq r$ מתקיים $M_i = M_r$.
אנו יודעים כי $M_i \supseteq M_r$ ($M_i \subseteq M_r$). לכן יהי $v \in M_i$ ($v \in M_r$). יש $v' \in M_r$ ($v' \in M_i$) כך שמתקיים $\beta(v) = \beta(v')$. לכן $v - v' \in \ker\beta = \mathrm{Im}\alpha$. נניח כי $u \in M'$ כך שמתקיים $v - v' = \alpha(u)$.
בסך הכל נקבל $v - v' \in M_i$ ($v - v' \in M_r$), ולכן $u \in \alpha^{-1}(M_i)$ ($u \in \alpha^{-1}(M_r)$).
כעת, $v = v' + \alpha(u) \in M_r + \alpha\left(\alpha^{-1}(M_i)\right) = M_r + \alpha\left(\alpha^{-1}(M_r)\right) = M_r$ ($v \in M_i + \alpha\left(\alpha^{-1}(M_i)\right) = M_i$). ■

מסקנה 2.4 סכום ישר סופי של מודולי נתר (ארטין) הוא מודול נתר (ארטין).

הוכחה: מספיק להוכיח עבור 2 מדוולים. נניח כי $M = M_1 \oplus M_2$ כאשר M_1, M_2 מודולי נתר (ארטין). הסדרה הבאה מדוייקת, ולכן נסיים:

$$0 \to M_1 \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M_2 \to 0$$

■

טענה 2.5 מודול נוצר סופית M מעל חוג נתר (ארטין) R הוא מודול נתר (ארטין) מעל R.

הוכחה: יש n טבעי עבורו M הוא תמונה הומומורפית של R^n. R^n הוא סכום ישר של R עם עצמו, כלומר הוא מודול נתר (ארטין) מעל R, ולכן גם M כזה. ■

טענה 2.6 יהי R חוג נתר (ארטין) ויהי $I \subseteq R$ אידאל. אזי R/I הוא חוג נתר (ארטין).

הוכחה: R/I הוא מודול נתר (ארטין) מעל R. תת מודול מעל R של R/I הוא מהצורה J/I כאשר $I \subseteq J \subseteq R$ אידאל. לכן יש תנאי שרשרת עולה (יורדת) על האידאלים של חוג המנה R/I, ולכן R/I הוא חוג נתר (ארטין). ■

טענה 2.7 יהיו $A \subseteq R$ חוגים. נניח כי R נוצר סופית כמודול מעל A, וכי A הוא חוג נתר (ארטין). אזי גם R חוג נתר (ארטין).

הוכחה: מטענה קודמת R הוא מודול נתר (ארטין) מעל A. בפרט R הוא מודול נתר (ארטין) מעל R, כלומר R חוג נתר (ארטין). ■

מסקנה 2.8 נניח כי R חוג נתר (ארטין). אזי החוג R^n הוא גם חוג נתר (ארטין), לכל n.

הוכחה: מציבים בטענה $A = R(1, \ldots, 1) \subseteq R^n$. ■

טענה 2.9 תהי $S \subseteq R$ קבוצה כפלית. נניח כי R חוג נתר (ארטין). אזי גם $S^{-1}R$ הוא חוג נתר (ארטין).

הוכחה: תהי $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ שרשרת עולה (יורדת) של אידאלים של $S^{-1}R$. נסמן $f^{-1}(J_k) = I_k$. אזי $J_k = S^{-1}I_k$. $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ היא שרשרת עולה (יורדת) בחוג R, ולכן מתייצבת, נניח באינדקס n, כלומר לכל $k \geq n$ מתקיים:

$$I_k = I_n$$

אזי

$$J_k = S^{-1}I_k = S^{-1}I_n = J_n$$

■

2.2 חוגי ארטין

טענה 2.10 בחוג ארטין, כל אידאל ראשוני הוא מקסימלי.

הוכחה: יהי $P \subseteq R$ אידאל ראשוני. נסמן $B = R/P$. זהו תחום שלמות. נראה שזהו שדה.
נניח כי $0 \neq x \in B$.
נתבונן בסדרת האידאלים

$$Bx \supseteq Bx^2 \supseteq Bx^3 \supseteq \dots$$

כיוון שגם B חוג ארטין, סדרה זו מתייצבת. נניח כי

$$Bx^n = Bx^{n+1}$$

כלומר יש $b \in B$ עבורו $x^n = x^{n+1}b$.

$$x^{n+1}b - x^n = 0$$
$$x^n (xb - 1) = 0$$

כעת $x^n \neq 0$, שכן $x \neq 0$ וכן B תחום שלמות. לכן נקבל $xb - 1 = 0$, כלומר $xb = 1$.
לכן B שדה, והאידאל P מקסימלי. ■