אלגברה ב3

ארזים ©

15 בדצמבר 2016

בשיעור שעבר, היינו בעיצומה של ההוכחה הבאה:

משפט 0.1 יהי $\varphi : R_1 \to R_2$ הומומורפיזם של חוגים, ויהי $P \subseteq R_1$ אידאל ראשוני כך שמתקיים

$$\varphi^{-1}\left(R_2\varphi\left(P\right)\right) = P$$

אזי קיים אידאל ראשוני $Q \subseteq R_2$ כך שמתקיים

$$P = \varphi^{-1}\left(Q\right)$$

הוכחה: נגדיר $S = \varphi\left(R_1 \backslash P\right) \subseteq R_2$. זו כמובן קבוצה כפלית. נראה כעת כי

$$S \cap R_2\varphi\left(P\right) = \emptyset$$

אחרת, יהי s בחיתוך. אזי $s \in S$, ולכן $s = \varphi\left(t\right)$ עבור $t \in R_1 \backslash P$ כלשהו. כמו כן, $s \in R_2\varphi\left(P\right)$, כלומר $\varphi\left(t\right) \in R_2\varphi\left(p\right)$. אזי מתקיים

$$t \in \varphi^{-1}\left(R_2\varphi\left(P\right)\right) = P$$

וזו סתירה, כי $t \in R_1 \backslash P$.
נסיק כי מתקיים

$$S^{-1}\left(R_2\varphi\left(P\right)\right) \subsetneq S^{-1}R_2$$

לכן קיים אידאל מקסימלי $m \subseteq S^{-1}R_2$ אשר מכיל את האידאל $S^{-1}\left(R_2\varphi\left(P\right)\right)$. כיוון שבפרט, m אידאל ראשוני, נוכל לכתוב $m = S^{-1}Q$ עבור אידאל ראשוני $Q \subseteq R_2$ כלשהו שזר לקבוצה S.
נראה כי $Q \supseteq R_2\varphi\left(P\right)$. יהי $b \in R_2\varphi\left(P\right)$. אזי מתקיים

$$\frac{b}{1} \in S^{-1}\left(R_2\varphi\left(P\right)\right) \subseteq m = S^{-1}Q$$

כעת, נכתוב

$$\frac{b}{1} = \frac{q}{s}$$

עבור $q \in Q, s \in S$, לכן קיים $z \in S$ עבורו

$$z\left(sb - q\right) = 0$$
$$zsb = qz \in Q$$

$zs \in S$, כלומר $zs \notin Q$, אבל $bzs \in Q$, ולכן בהכרח $b \in Q$ (כי Q ראשוני). לכן קיבלנו כי

$$R_2\varphi\left(P\right) \subseteq Q$$
$$P = \varphi^{-1}\left(R_2\varphi\left(P\right)\right) \subseteq \varphi^{-1}\left(Q\right)$$

נראה שזהו שוויון של ממש. נניח בשלילה שלא, אזי קיים איבר $t \in \varphi^{-1}\left(Q\right) \backslash P$. אזי $\varphi\left(t\right) \in \varphi\left(R_1 \backslash P\right) = S$, וכמובן גם $\varphi\left(t\right) \in Q$, בסתירה - $Q \cap S = \emptyset$. לכן קיבלנו את השוויון שרצינו. ■

1 אידאלים פרימרים

1.1 אידאלים פרימרים ופירוק פרימרי

הגדרה 1.1 אידאל $Q \subsetneq R$ ייקרא <u>פרימרי</u> אם התכונה הבאה מתקיימת לכל $x, y \in R$:

$$xy \in Q \Rightarrow x \in Q \vee y \in \sqrt{Q}$$

הגדרה שקולה: $Q \subseteq R$ הוא אידאל פרימרי אם $R/Q \neq 0$, וכל מחלק אפס בחוג R/Q הוא נילפוטנטי.

אם $f : R_1 \to R_2$ הומומורפיזם של חוגים, $Q \subseteq R_2$ אידאל פרימרי, אזי $f^{-1}\left(Q\right) \subseteq R_1$ אידאל פרימרי, שכן אם $xy \in f^{-1}\left(Q\right)$, אזי $f\left(x\right)f\left(y\right) \in Q$. לכן $f\left(x\right) \in Q$, ואז $x \in f^{-1}\left(Q\right)$, או $f\left(y\right)^n = f\left(y^n\right) \in Q$, ואז $y^n \in f^{-1}\left(Q\right)$, כלומר $y \in \sqrt{f^{-1}\left(Q\right)}$.

דוגמא בחוג השלמים, לכל מספר ראשוני p ולכל טבעי n, האידאל $\mathbb{Z}p^n$ הוא אידאל פרימרי.
נניח כי $xy \in \mathbb{Z}p^n$, אזי $p^n \mid xy$. אם $p^n \nmid x$, אזי $p \mid y$, כלומר $p^n \mid y^n$. לכן $y^n \in \mathbb{Z}p^n$, כלומר $y \in \sqrt{\mathbb{Z}p^n}$.

טענה 1.2 נניח כי $Q \subseteq R$ אידאל פרימרי. אזי $\sqrt{Q}$ הוא אידאל ראשוני. זהו האידאל הראשוני הקטן ביותר אשר מכיל את Q.

הוכחה: נניח כי $xy \in \sqrt{Q}$. אזי יש n טבעי עבורו $x^n y^n \in Q$, כלומר $x^n \in Q$ או $y^n \in \sqrt{Q}$. אם $x^n \in Q$, אזי $x \in \sqrt{Q}$. אם $y^n \in Q$, אזי יש m טבעי עבורו $y^{nm} \in Q$, כלומר $y \in \sqrt{Q}$.

כמובן, הרדיקל הוא החיתוך של כל האידאלים הראשוניים המכילים את Q, ולכן הוא מוכל בכולם. ■

דוגמא נחזור לדוגמא הקודמת. נניח כי $\mathbb{Z}m$ אידאל פרימרי של $\mathbb{Z}$. נכתוב $m = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$, עבור p_i ראשוניים כלשהם, וכן $r_i \geq 1$ חזקות כלשהן. מתקיים

$$\sqrt{\mathbb{Z}m} = \mathbb{Z}_{p_1 \cdot \dots \cdot p_k}$$

אבל זהו רדיקל של אידאל פרימרי, כלומר ראשוני. לכן $k = 1$, ולכן $m = p^r$ עבור ראשוני וחזקה כלשהם.

דוגמא $R = \mathbb{F}[x, y]$, $\mathbb{F}$ שדה. נתבונן באידאל $Q = Rx + Ry^2$. זהו אידאל פרימרי:

$$R/Q = \mathbb{F}[y] / \mathbb{F}[y] y^2$$

בדיוק כמו בדוגמה הקודמת, כיוון שהחוג $\mathbb{F}[y]$ הוא ראשי, האידאל $\mathbb{F}[y] y^2$ הוא פרימרי ־ הוא נוצר על ידי חזקה של פולינום אי פריק. לכן כל מחלק אפס במנה באגף ימין הוא נילפוטנטי, ולכן זה נכון גם עבור R/Q, כלומר Q אכן אידאל פרימרי. נסמן $P = Rx + Ry$. כעת נראה כי $\sqrt{Q} = P$. נניח כי $f(x, y) \in \sqrt{Q}$. אזי קיים n טבעי עבורו

$$f(x, y)^n \in Q$$

כמובן, ניתן לכתוב

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{l} a_i(x) y^i$$

כאשר $a_i(x) \in \mathbb{F}[x]$. אז מתקיים

$$f(x, y)^n = a_0(x)^n + y \cdot g(x, y)$$

עבור פולינום כלשהו $g(x, y) \in R$. כמו כן, $f(x, y)^n \in Q = Rx + Ry^2$. נסיק כי בהכרח $a_0(x)^n \in Rx$, כלומר $x \mid a_0(x)^n$. לכן, $x \mid a_0(x)$. בסך הכל מתקיים

$$f(x, y) = a_0(x) + y \sum_{i=1}^{l} a_i(x) y^{i-1} \in Rx + Ry = P$$

אז הראינו $\sqrt{Q} \subseteq P$. ההכלה השנייה ברורה: $y \in \sqrt{Q}$, שכן $y^2 \in Q$. כמו כן $x \in Q$. יחד נקבל

$$Rx + Ry \subseteq \sqrt{Q}$$

וזה השוויון שרצינו.
כעת, מתקיים

$$P^2 \subseteq Q \subseteq P$$

שכן מתקיים

$$P^2 = Rx^2 + Rxy + Ry^2 \subseteq Rx + Ry^2 = Q$$

כמו כן, כל ההכלות הן ממש:

$$P^2 \subsetneq Q \subsetneq P$$

למשל, $y \in P \backslash Q$, וכן $x \in Q \backslash P^2$. כעת, נראה כי Q אינו חזקה של אידאל ראשוני.
נניח בשלילה כי $Q = P'^n$, כאשר P' אידאל ראשוני. מההכלות, נקבל

$$P'^n \subseteq P$$

והרי P ראשוני, ולכן

$$P' \subseteq P$$

אם $n \geq 2$, אזי

$$P^2 \subsetneq Q = P'^n \subseteq P^n \subseteq P^2$$

בסתירה. לכן בהכרח $n = 1$. ואז $Q = P'$ אידאל ראשוני, וזה לא נכון, כי $y^2 \in Q$,
בעוד $y \notin Q$.

הדוגמא האחרונה מראה שלא כל אידאל פרימרי הוא חזקה של ראשוני. כעת נראה דוגמא שמראה שגם בכיוון ההפוך, חזקה של אידאל ראשוני אינה בהכרח אידאל פרימרי.

דוגמא ניקח

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{F}[x, y, z] \\
J &= A\left(xy - z^2\right) \\
R &= A/J
\end{aligned}$$

נסמן כעת

$$\overline{f(x, y, z)} = f(x, y, z) + J \in R$$

נסמן

$$P = R\overline{x} + R\overline{y}$$

ואז מתקיים

$$R/P \cong \mathbb{F}[y]$$

על ידי ההעתקה

$$\overline{f(x,y,z)} + P \to f(0,y,0)$$

בדיקת ההעתקה נשארת כתרגיל. לכן P אידאל ראשוני, כי המנה $\mathbb{F}[y]$ היא תחום שלמות. נתבונן באידאל P^2. מתקיים

$$\overline{x} \cdot \overline{y} \in P^2$$

אבל $\overline{x} \notin P$, וכן $\overline{y} \notin P$, אבל $\sqrt{P^2} = P$ (תרגיל), ולכן P^2 אינו אידאל פרימרי.

דוגמא זו הראתה גם שאם $\sqrt{I}$ הוא אידאל ראשוני, עבור אידאל I כלשהו, אזי לאו דווקא I פרימרי.

טענה 1.3 יהי $I \subseteq R$ אידאל עבורו $\sqrt{I}$ הוא אידאל מקסימלי. אזי I אידאל פרימרי.

הוכחה: נסמן $\sqrt{I} = m$, וזהו אידאל מקסימלי, מהנתון. זהו גם חיתוך כל האידאלים הראשוניים P שמכילים את I. לכן $P \subseteq m$ לכל אידאל ראשוני P המכיל את I. m מקסימלי, ולכן $P = m$ תמיד, כלומר יש אידאל ראשוני יחיד שמכיל את I, וזהו m. מכאן שבחוג המנה R/I יש אידאל ראשוני יחיד - m/I, שהוא גם אידאל מקסימלי. לכן, R/I הוא חוג מקומי, עם אידאל מקסימלי יחיד m/I. אם כן, $m/I = R/I \setminus (R/I)^*$. מכאן, כל מחלק אפס בחוג R/I שייך לאידאל m/I. נתבונן ברדיקל הנילי $\mathcal{N}(R/I)$. זהו חיתוך כל האידאלים הראשוניים בחוג, אבל רק m/I ראשוני, לכן $\mathcal{N}(R/I) = m/I$. לכן כל מחלק אפס במנה R/I שייך לרדיקל הנילי, כלומר הוא נילפוטנטי, ולכן I פרימרי. ■

מסקנה 1.4 כל חזקה של אידאל מקסימלי היא אידאל פרימרי.

הגדרה 1.5 יהי $Q \subseteq R$ אידאל פרימרי. נסמן $P = \sqrt{Q}$. זהו אידאל ראשוני, ואנחנו נאמר כי Q אידאל פרימרי ביחס לאידאל P (ולעיתים, Q אידאל P פרימרי).

טענה 1.6 יהיו $\{Q_i\}_{i=1}^n$ אידאלים פרמרים בחוג R ביחס לאידאל הראשוני P. אזי גם $\bigcap Q_i$ הוא אידאל פרימרי ביחס לאידאל P.

הוכחה: טענה פשוטה שנשארת כתרגיל היא שמתקיים תמיד

$$\sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} Q_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \sqrt{Q_i} = \bigcap_{i=1}^{n} P = P$$

לכן נותר רק להראות שהחיתוך פרימרי. נניח כי

$$xy \in \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$$

וכן נניח כי x אינו איבר בחיתוך. נרצה להראות כי $y \in P$. קיים $1 \leq i \leq n$ עבורו $x \notin Q_i$, אבל $xy \in Q_i$, וכן Q_i פרימרי, ולכן $y \in \sqrt{Q_i} = P$, ולכן סיימנו. ■

למה 1.7 יהי $Q \subseteq R$ אידאל פרימרי ביחס לאידאל P.

1. אם $x \in Q$ אזי $(Q : x) = R$.
2. אם $x \notin Q$ אזי $(Q : x)$ הוא פרימרי ביחס לאידאל P.
3. אם $x \notin P$ אזי $(Q : x) = Q$.

הוכחה: ניזכר בהגדרה:

$$(Q : x) = \{a \in R \mid ax \in Q\}$$

1. אם $x \in Q$, אז לכל $a \in R$ גם $ax \in Q$ ולכן $(Q : x) = R$.
2. נניח כי $x \notin Q$. אם $a \in (Q : x)$, אזי $ax \in Q$, והרי Q פרימרי. לכן $a \in \sqrt{Q} = P$. לכן $(Q : x) \subseteq P$. כמו כן,

$$Q \subseteq (Q : x) \subseteq P$$
$$P = \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{(Q : x)} \subseteq \sqrt{P} = P$$

לכן $\sqrt{(Q : x)} = P$. נותר רק להראות כי $(Q : x)$ פרימרי. נניח כי $ab \in (Q : x)$, כלומר $axb \in Q$. אם $b \notin P = \sqrt{(Q : x)} = \sqrt{Q}$, אז בהכרח $ax \in Q$, כי Q פרימרי, ולכן $a \in (Q : x)$. לכן סיימנו.

3. נניח כי $a \in (Q : x)$, כלומר $ax \in Q$. $x \notin P = \sqrt{Q}$, ולכן $a \in Q$. לכן $(Q : x) \subseteq Q$. ההכלה השנייה תמידה נכונה, ולכן השוויון.

■

הגדרה 1.8 אידאל I בחוג R ייקרא פריק אם אפשר לכתוב את I בתור חיתוך סופי של אידאלים פרימריים. חיתוך שכזה ייקרא גם פירוק של I. פירוק

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$$

לחיתוך של אידאלים פרימריים ייקרא מינימלי אם הרדיקלים $P_i = \sqrt{Q_i}$ הם אידאלים ראשוניים שונים זה מזה, וכן אין אידאל Q_i שמכיל חיתוך של אידאלים אחרים Q_j, Q_k.

תמיד ניתן להביא פירוק כלשהו של I לפירוק מינימלי. באותם סימונים של ההגדרה, אם $Q_{i_1}, \dots, Q_{i_k}$ אידאלים פרימריים ביחס לאותו אידאל ראשוני P, אז ראינו שגם החיתוך שלהם הוא אידאל פרימרי ביחס לאותו אידאל ראשוני P. לכן בפירוק עצמו נוכל להחליף את כל האידאלים הללו בחיתוך שלהם.

1.2 משפט היחידות הראשון

משפט 1.9 יהי $I \subseteq R$ אידאל פריק. יהי

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$$

פירוק מינימלי של I. נסמן $P_i = \sqrt{Q_i}$. אזי $\{P_1, \dots, P_n\}$ נקבעים ביחידות: הם בדיוק כל האידאלים הראשוניים השייכים לקבוצה

$$\left\{ \sqrt{(I : x)} \mid x \in R \right\}$$

הוכחה: נתובנן באידאל $(I : x)$, עבור $x \in R$ כלשהו.

$$(I : x) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i : x \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (Q_i : x)$$

$$\sqrt{(I : x)} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} (Q_i : x)} = \bigcap_{i=1}^{n} \sqrt{(Q_i : x)} = \bigcap_{i \in \{i | x \notin Q_i\}} P_i$$

המעבר האחרון הוא מתוך למה 1.7. אם $\sqrt{(Q_i : x)}$ אידאל ראשוני, נסיק כי יש $1 \leq j \leq n$ עבורו $x \notin Q_j$ וכן $\sqrt{(I : x)} = P_j$. לכן כל אידאל ראשוני מהצורה $\sqrt{(I : x)}$ הוא אחד מבין P_i. כמו כן, עבור $1 \leq i_0 \leq n$, נבחר

$$x_{i_0} \in \bigcap_{j \neq i_0} Q_j \backslash Q_{i_0}$$

אז מתקיים

$$(I : x) = \bigcap_{i \in \{i | x \notin Q_i\}} (Q_i : x) = (Q_{i_0} : x) \Rightarrow \sqrt{(I : x)} = \sqrt{(Q_{i_0} : x)} = P_{i_0}$$

וזה מראה את ההכלה השנייה, ולכן סיימנו. ■