אלגברה ב3

ⓒ ארזים

5 בדצמבר 2016

1 חוגי ומודולי שברים

בשיעור שעבר דיברנו על מודולי שברים, וראינו כי על הפעולה של מעבר לקיחת S^{-1}, למודולים והומומורפיזמים שלהם מעל R, היא פעולה מדוייקת.

בפרט, אם $U \subseteq M$ מודולים מעל R, נוכל להתבונן בסדרה המדויקת:

$$0 \to U \hookrightarrow M$$

ולקבל שגם הסדרה הבאה מדוייקת:

$$0 \to S^{-1}U \to S^{-1}M$$

ולכן נראה את $S^{-1}U \subseteq S^{-1}M$ כתת מודול.

טענה 1.1 נתונים מודולים ותת מודולים $M, N \subseteq L$ מעל R, וכן $S \subseteq R$ קבוצה כפלית. אזי:

.1

$$S^{-1}(M+N) = S^{-1}M + S^{-1}N$$

.2

$$S^{-1}(M \cap N) = S^{-1}M \cap S^{-1}N$$

.3

$$S^{-1}\left(L/N\right) \cong S^{-1}L/S^{-1}N$$

הוכחה:

1. $S^{-1}(M), S^{-1}(N) \subseteq S^{-1}(M+N)$, ולכן $S^{-1}(M)+S^{-1}(N) \subseteq S^{-1}(M+N)$.
בכיוון השני, יהי $\frac{m+n}{s} \in S^{-1}(M+N)$, נוכל לכתוב

$$\frac{m+n}{s} = \frac{m}{s} + \frac{n}{s} \in S^{-1}M + S^{-1}N$$

מכאן מקבלים את ההכלה השנייה.

2. ברור כי $M \cap N \subseteq M, N$, ולכן

$$S^{-1}(M \cap N) \subseteq S^{-1}(M), S^{-1}(N)$$
$$S^{-1}(M \cap N) \subseteq S^{-1}(M) \cap S^{-1}(N)$$

בכיוון השני, נניח כי

$$S^{-1}(M) \cap S^{-1}(N) \ni x = \frac{m}{s} = \frac{n}{t}$$

עבור $s, t \in S$, $m \in M, n \in N$. מכאן שקיים $s_0 \in S$ עבורו

$$s_0(tm - sn) = 0$$
$$M \ni s_0 tm = s_0 sn \in N$$

נסמן את האיבר שקיבלנו w, אזי $w \in M \cap N$. לכן

$$x = \frac{m}{s} = \frac{s_0 tm}{s_0 ts} = \frac{w}{s_0 ts} \in S^{-1}(M \cap N)$$

וקיבלנו את ההכלה השנייה.

3. נתבונן בסדרה המדוייקת:

$$0 \to N \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\nu} L/N \to 0$$

לכן גם הסדרה הבאה מדוייקת:

$$0 \to S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}i} S^{-1}L \xrightarrow{S^{-1}\nu} S^{-1}\left(L/N\right) \to 0$$

כעת, מתקיים $\ker S^{-1}\nu = \mathrm{Im} S^{-1} i = S^{-1}N$, וכן $\mathrm{Im} S^{-1}\nu = S^{-1}\left(L/N\right)$, ולכן ממשפט האיזומורפיזם הראשון:

$$S^{-1}L/S^{-1}N \cong S^{-1}\left(L/N\right)$$
$$\frac{l}{s} + S^{-1}N \longmapsto \frac{l+N}{s}$$

$\blacksquare$

טענה 1.2 יהי M מודול מעל R, ותהי $S \subseteq R$ כפלית. אזי

$$S^{-1}R \otimes_R M \cong S^{-1}M$$

כמודולים מעל $S^{-1}R$.

הוכחה: נגדיר

$$\varphi : S^{-1}R \times M \to S^{-1}M$$
$$\varphi\left(\frac{r}{s}, m\right) = \left(\frac{rm}{s}\right)$$

כמובן, φ בילינארית מעל R. למשל:

$$\varphi\left(a \cdot \frac{r}{s}, m\right) = \varphi\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{r}{s}, m\right) = \varphi\left(\frac{ar}{s}, m\right) = \frac{arm}{s} =$$
$$= \frac{a}{1} \cdot \frac{rm}{s} = a \cdot \frac{rm}{s} = a \cdot \varphi\left(\frac{r}{s}, m\right)$$
$$\varphi\left(\frac{r}{s}, a \cdot m\right) = \frac{ram}{s} = \frac{a}{1} \cdot \frac{rm}{s} = a \cdot \frac{rm}{s} = a \cdot \varphi\left(\frac{r}{s}, m\right)$$

φ מגדירה, אם כן, הומומורפיזם יחיד של מודולים מעל R,

$$\varphi' : S^{-1}R \otimes_R M \to S^{-1}M$$
$$\varphi'\left(\frac{r}{s} \otimes m\right) = \frac{rm}{s}$$

ברור כי φ' הוא גם הומומורפיזם של מודולים מעל $S^{-1}R$:

$$\varphi'\left(\frac{a}{t} \cdot \left(\frac{r}{s} \otimes m\right)\right) = \varphi'\left(\frac{ar}{ts} \otimes m\right) = \frac{arm}{ts} = \frac{a}{t} \cdot \frac{rm}{s} = \frac{a}{t}\varphi'\left(\frac{r}{s} \otimes m\right)$$

ברור כי φ' על. נותר להראות כי הוא חד־חד־ערכי. נניח כי

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i}{s_i} \otimes m_i \in \ker \varphi'$$

כלומר

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{r_i m_i}{s_i} = \frac{0}{1}$$

נסמן $s=s_1\cdot\dots\cdot s_k$, וכן $t_i=\frac{s}{s_i}$, ואז נפתח את הנתון:

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{r_im_i}{s_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{t_ir_im_i}{s}=\frac{0}{1}$$

לכן קיים $u\in S$ כך שמתקיים

$$u\cdot\sum_{i=1}^{k}t_ir_im_i=0$$

כעת,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\frac{r_i}{s_i}\otimes m_i=\sum_{i=1}^{m}\frac{t_ir_i}{s}\otimes m_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{ut_ir_i}{us}\otimes m_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{us}\otimes ut_ir_im_i=\\=\frac{1}{us}\otimes\left(\sum_{i=1}^{k}ut_ir_im_i\right)=\frac{1}{us}\otimes 0=0\end{aligned}$$

לכן φ' חד־חד־ערכי, ולכן גם איזומורפיזם. ■

מסקנה 1.3 $S^{-1}R$ הוא מודול שטוח מעל R.

הוכחה: נניח כי $\varphi:U\to V$ מונומורפיזם של מודולים מעל R. נסמן את האיזומורפיזמים הבאים, שהוכחנו שקיימים

$$\begin{aligned}i:S^{-1}R\otimes_R U\to S^{-1}U\\ j:S^{-1}R\otimes V\to S^{-1}V\end{aligned}$$

ואז נגדיר $\xi=j\circ(id\otimes\varphi)\circ i^{-1}$. נראה כי $\xi=S^{-1}\varphi$, ומדיוק לקיחת S^{-1} נקבל את מה שרצינו.

$$\xi\left(\frac{u}{s}\right)=\xi\left(i\left(\frac{1}{s}\otimes u\right)\right)=j\left((id\otimes\varphi)\left(\frac{1}{s}\otimes u\right)\right)=j\left(\frac{1}{s}\otimes\varphi(u)\right)=\frac{\varphi(u)}{s}=S^{-1}\varphi\left(\frac{u}{s}\right)$$

■

טענה 1.4 נתונים שני מודולים M,N מעל R, וכן $S\subseteq R$ קבוצה כפלית. אזי

$$\begin{aligned}S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}S^{-1}N\cong S^{-1}(M\otimes_R N)\\ \frac{m}{s}\otimes\frac{n}{t}\mapsto\frac{m\otimes n}{st}\end{aligned}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}S^{-1}N &\cong S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}\left(S^{-1}R\otimes_R N\right)\cong\\ &\cong \left(S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}S^{-1}R\right)\otimes_R N\cong\\ &\cong \left(S^{-1}M\otimes_{S^{-1}R}S^{-1}R\right)\otimes_R N\cong\\ &\cong S^{-1}M\otimes_R N\cong\left(S^{-1}R\otimes_R M\right)\otimes_R N\cong\\ &\cong S^{-1}R\otimes_R\left(M\otimes_R N\right)\cong S^{-1}\left(M\otimes_R N\right) \end{aligned}$$

■

1.1 תכונות מקומיות

כאשר $S=R\backslash P$, עבור $P\subseteq R$ אידאל ראשוני, אז הסימונים שלנו הם:

$$\begin{aligned} S^{-1}R&=R_P\\ S^{-1}M&=M_P\\ S^{-1}\varphi&=\varphi_P \end{aligned}$$

טענה 1.5 יהי M מודול מעל R. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. $M=0$.
2. $M_P=0$ לכל אידאל ראשוני P.
3. $M_m=0$ לכל אידאל מקסימלי m.

הוכחה: $1\Rightarrow 2\Rightarrow 3$: טריוויאלי, מודל שברים של מודול האפס הוא מודול האפס, וכל אידאל מקסימלי הוא בפרט ראשוני.

$3\Rightarrow 1$: נניח בשלילה כי $M\neq 0$, ויהי $0\neq v\in M$. נתבונן באידאל

$$I=\mathrm{Ann}_R\left(v\right)=\left\{r\in R\mid r\cdot v=0\right\}$$

$I\neq R$, כי למשל $1\notin I$. יהי m אידאל מקסימלי כלשהו שמכיל את I. נתבונן באיבר $\frac{v}{1}\in M_m=0$, ולכן $\frac{v}{1}=\frac{0}{1}$. כלומר קיים $s\in R\backslash m$ עבורו $sv=0$, ולכן $s\in I\subseteq m$, וזו סתירה, כי $s\in R\backslash M$. ■

טענה 1.6 יהי $\phi:M\to N$ הומומורפיזם של מודולים מעל R. אזי התכונות הבאות שקולות:

1. ϕ חד־חד־ערכי.
2. ϕ_P חד־חד־ערכי לכל אידאל ראשוני P.
3. ϕ_m חד־חד־ערכי לכל אידאל מקסימלי m.

הוכחה: $2 \Rightarrow 1$: ידוע לנו כבר, משום שתמיד $S^{-1}\phi$ חד־חד־ערכי, לכל S כפלית ולכל ϕ חד־חד־ערכי. בפרט זה נכון עבור $S = R \backslash P$, לכל אידאל ראשוני P.
$3 \Rightarrow 2$: ברור, כל אידאל מקסימלי הוא בפרט ראשוני.
$1 \Rightarrow 3$: נסמן $M' = \ker \phi$. זהו תת מודול של M. הסדרה הבאה מדוייקת:

$$0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} N$$

כאשר i הוא הומומורפיזם ההכלה. כעת נוכל לעבור למודולי שברים ולשמור דיוק:

$$0 \to M'_m \xrightarrow{i_m} M_m \xrightarrow{\varphi_m} N_m$$

אם כן, מתקיים $M'_m = \ker \varphi_m = 0$. זה כמובן נכון לכל אידאל מקסימלי m, ולכן $M' = 0$ מהטענה הקודמת, ולכן ϕ חד־חד־ערכי. ■

טענה 1.7 יהי $\phi : M \to N$ הומומורפיזם של מודולים מעל R. התנאים הבאים שקולים:

1. ϕ על.
2. ϕ_P על לכל אידאל ראשוני P.
3. ϕ_m על לכל אידאל מקסימלי m.

הוכחה: $2 \Rightarrow 1$: ידוע לנו כבר, משום שתמיד $S^{-1}\phi$ על, לכל S כפלית ולכל ϕ על. בפרט זה נכון עבור $S = R \backslash P$, לכל אידאל ראשוני P.
$3 \Rightarrow 2$: ברור, כל אידאל מקסימלי הוא בפרט ראשוני.
$1 \Rightarrow 3$: נסמן $N' = \mathrm{Im}\phi$. זהו תת מודול של N. הסדרה הבאה מדוייקת:

$$M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\nu} N/N' \to 0$$

כאשר ν הוא הומומורפיזם המנה. כעת נוכל לעבור למודולי שברים ולשמור דיוק:

$$M_m \xrightarrow{\phi_m} N_m \xrightarrow{\nu_m} \left(N/N'\right)_m \to 0$$

אם כן, מתקיים $N_m = \ker \nu_m$, כלומר $\nu_m = 0$, אבל על, ולכן $\left(N/N'\right)_m = 0$. זה כמובן נכון לכל אידאל מקסימלי m, ולכן $N/N' = 0$ מטענה קודמת. לכן $N' = N$, כלומר ϕ על. ■

טענה 1.8 יהי M מודול מעל R. התנאים הבאים שקולים:

1. M מודול שטוח מעל R.
2. M_P מודול שטוח מעל R_P לכל אידאל ראשוני P.
3. M_m מודול שטוח מעל R_m לכל אידאל מקסימלי m.

הוכחה: $2 \Rightarrow 1$: $M_P = S^{-1}M$, עבור $S = R\backslash P$. ראינו כי $S^{-1}M \cong S^{-1}R \otimes_R M \cong R_P \otimes_R M$, ולכן M_p הוא איזומורפי מעל R_P למודול הרחבת סקלרים לחוג R_P שמתקבל מהמודול M. ראינו בעבר כי הרחבת סקלרים של מודול שטוח נותנת מודול שטוח.

$3 \Rightarrow 2$: ברור, כל אידאל מקסימלי הוא בפרט ראשוני.

$1 \Rightarrow 3$: יהי $\varphi : U \to V$ מונומורפיזם של מודולים מעל R. נרצה להראות כי גם $id_M \otimes \varphi : M \otimes_R U \to M \otimes_R V$ מונומורפיזם.

אנחנו יודעים כי $\varphi_m : U_m \to V_m$ הוא מונומורפיזם לכל אידאל מקסימלי m. ראינו כי

$$M_m \otimes_{R_m} U_m \cong (M \otimes_R U)_m$$
$$M_m \otimes_{R_m} V_m \cong (M \otimes_R V)_m$$

נקרא לאיזומורפיזמים i, j בהתאמה. כיוון שידוע כי M_m מודול שטוח מעל R_m, נובע כי $id_{M_m} \otimes \varphi_m : M_m \otimes_{R_m} U_m \to M_m \otimes_{R_m} V_m$ מונומורפיזם. נגדיר $\xi = j \circ (id_{M_m} \otimes_{R_m} \varphi_m) \circ i^{-1}$.

כעת, עבור $m \in M, u \in U, s, t \in S = R\backslash m$, מתקיים

$$(j \circ (id_{M_m} \otimes \varphi_m)) \left(\frac{m}{s} \otimes \frac{u}{t}\right) = j\left(\frac{m}{s} \otimes \frac{\varphi(u)}{t}\right) = \frac{m \otimes \varphi(u)}{st} =$$
$$= (\xi \circ i)\left(\frac{m}{s} \otimes \frac{u}{t}\right) = \xi\left(\frac{m \otimes u}{st}\right)$$

לכן נובע למעשה כי $\xi = (id_M \otimes \varphi)_m$. כמובן, מההגדרה, נובע כי $(id_M \otimes \varphi)_m$ חד־חד־ערכי לכל אידאל מקסימלי m (כל הזמן הזה עבדנו עם אידאל מקסימלי כללי). לכן מטענה קודמת גם $id_M \otimes \varphi$ חד־חד־ערכי, כפי שרצינו. ■

1.2 האידאלים בחוג השברים

הערה 1.9 תהי $S \subseteq R$ קבוצה כפלית בחוג R. אם $I \subseteq R$ אידאל, אזי $S^{-1}I \subseteq S^{-1}R$ הוא תת מודול של $S^{-1}R$ מעל $S^{-1}R$, כלומר הוא אידאל של החוג $S^{-1}R$.

טענה 1.10 כל אידאל של $S^{-1}R$ הוא מהצורה $S^{-1}I$ עבור אידאל $I \subseteq R$.

הוכחה: יהי $J \subseteq S^{-1}R$ אידאל. כזכור, יש לנו הומומורפיזם של חוגים:

$$f : R \to S^{-1}R$$
$$f(r) = \frac{r}{1}$$

התמונה ההפוכה $I = f^{-1}(J)$ היא אידאל של R (נכון באופן כללי על תמונה הפוכה של אידאל תחת הומומורפיזם של חוגים). נראה כי $J = S^{-1}I$.

נניח כי $\frac{a}{s} \in S^{-1}I$, עבור $a \in I, s \in S$. כלומר $\frac{a}{1} = f(a) \in J$. J אידאל, ולכן $\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{a}{s} \in J$. לכן הוכחנו $S^{-1}I \subseteq J$.

בכיוון השני, נניח כי $\frac{r}{s} \in J$, עבור $r \in R, s \in S$. לכן $\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{1} \in J$ $f(r) = \frac{r}{1} =$. לכן נובע $r \in f^{-1}(J) = I$, כלומר $\frac{r}{s} \in S^{-1}I$. לכן הוכחנו $J \subseteq S^{-1}I$. ■

יהי $R \supseteq I$. ניתן תיאור של

$$I \subseteq f^{-1}\left(S^{-1}I\right) = \left\{x \in R \mid \frac{x}{1} \in S^{-1}I\right\} = \left\{x \in R \mid \exists y \in I, s \in S. \frac{x}{1} = \frac{y}{s}\right\} =$$
$$= \{x \in R \mid \exists y \in I, t, s \in S. t\,(sx - y) = 0\} = \{x \in R \mid \exists y \in I, t, s \in S. tsx = yt\} =$$
$$= \{x \in R \mid \exists z \in S. zx \in I\}$$

לכל $z \in I$ נסמן

$$(I : z) = \{x \in R \mid z \cdot x \in I\}$$

קוראים "I חלקי z". בבירור, זהו אידאל שמכיל את I. לכן בסך הכל:

$$f^{-1}\left(S^{-1}I\right) = \bigcup_{z \in S} (I : z)$$