אלגברה ב3

ⓒ ארזים

1 בדצמבר 2016

1 חוגי שברים

מעתה נגיד חוג שברים במקום חוג מנות, כדי למנוע בלבול עם חוג מנה.
יהי R חוג, ותהי S קבוצה כפלית. בנינו כבר את חוג השברים $S^{-1}R$.

טענה 1.1 נניח כי $g : R \to B$ הומומורפיזם של חוגים, כך שלכל $s \in S$ האיבר $g(s)$ הפיך. אזי יש הומומורפיזם יחיד $h : S^{-1}R \to B$ עבורו $g = h \circ f$, באשר $f(x) = \frac{x}{1}$.

הוכחה: נגדיר

$$h\left(\frac{a}{s}\right) = g(a)\, g(s)^{-1}$$

נראה שההגדרה טובה: נניח כי $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$. לכן יש $t \in S$ עבורו $t(as' - a's) = 0$, ולכן

$$\begin{aligned} g(t)\left(g(a)\, g(s') - g(a')\, g(s)\right) &= 0 \\ g(a)\,(s') &= g(a')\, g(s) \\ g(a)\, g(s)^{-1} &= g(a')\, g(s')^{-1} \end{aligned}$$

השתמשנו כמובן בכך שהאביר $g(t)$ הפיך, כי $t \in S$. h הומומורפיזם שכן

$$\begin{aligned} h\left(\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'}\right) = h\left(\frac{as' + a's}{ss'}\right) &= g(as' + a's)\, g(ss')^{-1} = \\ &= \left(g(a)\, g(s') + g(a')\, g(s)\right) g(s)^{-1}\, g(s')^{-1} = \\ &= g(a)\, g(s)^{-1} + g(a')\, g(s')^{-1} = h\left(\frac{a}{s}\right) + h\left(\frac{a'}{s'}\right) \end{aligned}$$

נציב $s = 1$ בהגדרת h:

$$h(f(a)) = h\left(\frac{a}{1}\right) = g(a)$$

לכן נותר להראות רק כי h נקבע ביחידות על ידי התכונה $h \circ f = g$:

$$h\left(\frac{1}{s}\right) = \left(h\left(\frac{s}{1}\right)\right)^{-1} = \left(h(f(s))\right)^{-1} = g(s)^{-1}$$

לכן נובע כי

$$h\left(\frac{a}{s}\right)=h\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{s}\right)=h\left(\frac{a}{1}\right)h\left(\frac{1}{s}\right)=h\left(f\left(a\right)\right)g\left(s\right)^{-1}=g\left(a\right)g\left(s\right)^{-1}$$

■

$S^{-1}R$ מקיים את התכונות הבאות:

1. $f\left(s\right)$ תמיד הפיך, לכל $s\in S$.
2. $a\in\ker f$ אם ורק אם קיים $t\in S$ עבורו $ta=0$.
3. איברי $S^{-1}R$ הם מהצורה $f\left(a\right)f\left(s\right)^{-1}$, כאשר $a\in R,s\in S$.

טענה 1.2 יהי B חוג כך שיש $g:R\to B$ הומומורפיזם המקיים:

1. $g\left(s\right)\in B^{*}$ לכל $s\in S$.
2. $a\in\ker g$ אם ורק אם קיים $t\in S$ עבורו $ta=0$.
3. כל איבר של B הוא מהצורה $g\left(a\right)g\left(s\right)^{-1}$, כאשר $a\in R,s\in S^{-1}$.

אזי $S^{-1}R\cong B$ על ידי $\frac{a}{s}\mapsto g\left(a\right)g\left(s\right)^{-1}$.

הוכחה: יהי

$$h:S^{-1}R\to B$$

אותו הומומורפיזם שהגדרנו בהוכחת הטענה הקודמת, כלומר $h\left(\frac{a}{s}\right)=g\left(a\right)g\left(s\right)^{-1}$. ידוע לנו כבר כי זהו הומומורפיזם.

כעת, נניח כי $h\left(\frac{a}{s}\right)=0$. זה שקול לכך שמתקיים $g\left(a\right)=0$, כלומר $a\in\ker g$. אזי קיים $t\in S$ עבורו $ta=0$. מכאן, $\frac{a}{s}=\frac{0}{1}$, שכן $t\left(a\cdot1-0\cdot s\right)=0$.

h על, כמסקנה ישירה מתכונה 3 שבטענה. ■

דוגמא ניקח שוב את P להיות אידאל ראשוני של החוג R, ונסמן $S=R\backslash P$. מסמנים במצב זה $S^{-1}R=R_{P}$, וחוג זה נקרא הלוקליזציה של R באידאל P.

טענה 1.3 R_{P} הוא חוג מקומי.

הוכחה: נגדיר

$$m=\left\{ \frac{x}{s}\mid x\in P,s\notin P\right\} \subseteq R_{P}$$

זהו אידאל של R_{P}, ואינו כל החוג, שכן איבר היחידה לא שם - אם $x\in P,s\notin P$ מקיימים $\frac{x}{s}=\frac{1}{1}$, זה אומר שקיים $t\in R\backslash P$ כך שמתקיים $t\left(x-s\right)=0\in P$. נובע כי $x-s\in P$, ולכן $s\in P$, בסתירה.

כעת נראה כי $R_{P}\backslash m=R_{P}^{*}$. אם $\frac{x}{s}\in R_{P}\backslash m$, עבור $x\in R,s\in R\backslash P$, נובע כי $x\notin P$, ולכן $x\in S$. לכן בסך הכל $\frac{x}{s}$ הפיך - ההופכי שלו הוא $\frac{s}{x}$. ההכלה השנייה תמיד נכונה, לכל אידאל שאינו כל החוג, ולכן קיבלנו שהאידאל m הוא האידאל המקסימלי היחיד בחוג. ■

2 מודול שברים

כעת, יהי M מודול מעל R, ותהי $S \subseteq R$ כפלית. נבנה את $S^{-1}M$.
נגדיר יחס שקילות על $M \times S$:

$$(u,s) \sim (v,t) \iff \exists s' \in S \;\; s'(tu - sv) = 0$$

קל לבדוק שזה יחס שקילות. נסמן את מחלקת השקילות של (u,s) על ידי $\frac{u}{s}$ או $s^{-1}u$.
קבוצת מחלקות השקילות תסומן $S^{-1}M$.
על $S^{-1}M$ יש מבנה של מודול מעל $S^{-1}R$, על ידי

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \frac{v}{t} &= \frac{tm + vs}{st} \\ \frac{a}{t}\frac{m}{s} &= \frac{am}{ts} \end{aligned}$$

כאשר $S = R \backslash P$ עבור P אידאל ראשוני, נכתוב $S^{-1}M = M_P$, שהוא מודול מעל R_P.
נסמן בתור f את ההומומורפיזם $a \mapsto \frac{a}{1}$. כעת, נניח כי $g : M \to N$ הומומורפיזם של מודולים מעל R, אז יש לנו

$$\begin{aligned} S^{-1}g : S^{-1}M \to S^{-1}N \\ S^{-1}g\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{g(m)}{s} \end{aligned}$$

וזה כמובן הומומורפיזם של מודולים מעל R. אם

$$M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{\varphi} V$$

הומומורפיזמים של מודולים מעל R, אזי

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}V$$

כאשר

$$\begin{aligned} S^{-1}(\varphi \circ g) &= S^{-1}\varphi \circ S^{-1}g \\ S^{-1}(\varphi \circ g)\left(\frac{m}{s}\right) &= \frac{\varphi \circ g(m)}{s} = \frac{\varphi(g(m))}{s} = S^{-1}\varphi\left(\frac{g(m)}{s}\right) = \\ &= S^{-1}\varphi\left(S^{-1}g\left(\frac{m}{s}\right)\right) \end{aligned}$$

טענה 2.1 נניח כי

$$M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{\varphi} V$$

סדרה מדוייקת מעל R (כלומר $\mathrm{Im}g = \mathrm{Ker}\varphi$). אזי גם

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}V$$

סדרה מדוייקת ($\mathrm{Im}\left(S^{-1}g\right) = \ker\left(S^{-1}\psi\right)$).

הוכחה: מהנתון $\varphi \circ g = 0$, ולכן

$$0 = S^{-1}\left(\varphi \circ g\right) = S^{-1}\left(\varphi\right) \circ S^{-1}\left(g\right)$$

ולכן $\mathrm{Im}\left(S^{-1}g\right) \subseteq \ker\left(S^{-1}\varphi\right)$. בכיוון השני, נניח כי $\frac{n}{s} \in \ker\left(S^{-1}\varphi\right)$, כלומר $\frac{\varphi(n)}{s} = \frac{0}{1}$, משמע קיים $t \in S$ עבור $t\varphi\left(n\right) = \varphi\left(tn\right) = 0$. לכן $tn \in \ker\varphi = \mathrm{Im}g$. לכן נכתוב $tn = g\left(m\right)$. לכן מתקיים

$$\frac{n}{1} = \frac{g\left(m\right)}{t}$$

לכן נובע כי

$$\frac{n}{s} = \frac{g\left(m\right)}{ts} = S^{-1}g\left(\frac{m}{ts}\right) \in \mathrm{Im}S^{-1}g$$

לכן קיבלנו את ההכלה השנייה, ואת השוויון שרצינו בסך הכל. ■