חבורות Chevalley

הרצאה I

14.3.17

ספר מומלץ: Roger Carter: "Simple Groups of Lie Type"

פרק א': החבורות הקלאסיות

ס' 1: החבורות הלינאריות

K - שדה.

$GL_n(K)$ - חבורת המטריצות ההפיכות $n\times n$ מעל K.

$Z(GL_n(K))$ - מרכז החבורה $= \{\lambda\cdot I_n \mid \lambda\in K^*\} \cong K^*$

$$PGL_n(K) := GL_n(K) / Z(GL_n(K))$$

$\det : GL_n(K) \twoheadrightarrow K^*$ אפימורפיזם.

$$SL_n(K) := \ker(\det) \triangleleft GL_n(K)$$

מאיזו 1 נקבל: $GL_n(K) / SL_n(K) \cong K^*$.

$$Z(SL_n(K)) = \{\lambda I_n \mid \lambda^n = 1\} = Z(GL_n(K)) \cap SL_n(K)$$

$$PSL_n(K) := SL_n(K) / Z(SL_n(K)) = SL_n(K) / Z(GL_n(K)) \cap SL_n(K)$$

נניח כי $K=\mathbb{F}_q$ שדה סופי.

נחשב את כמות האיברים בחבורות הנ"ל:

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n-1)\cdot(q^n-q)\cdot\ldots\cdot(q^n-q^{n-1})$$

בחירת תמונת e_1: כל וקטור ב- $\mathbb{F}_q^n-\{0\}$

בחירת תמונת e_2 כל וקטור ב- $\mathbb{F}_q^n-\mathrm{Span}_{\mathbb{F}_q} Ae_1$

. . . .

$$= q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\cdot\prod_{i=1}^{n}(q^i-1)$$

$$|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|Z(GL_n(\mathbb{F}_q))|} = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{F}_q^*|} = q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\cdot\prod_{i=2}^{n}(q^i-1)$$

$$|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|SL_n(\mathbb{F}_q)|}{|Z(SL_n(\mathbb{F}_q))|} =$$

$$= \frac{\frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{F}_q^*|}}{|Z(SL_n(\mathbb{F}_q))|} = \frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1)}\cdot\prod_{i=2}^{n}(q^i-1)}{\gcd(q-1,n)}$$

$\mathbb{F}_q^*$ ציקלי

משפט: 1. K שדה אינסופי,
אז $PSL_n(K)$ חבורה פשוטה. $\forall n\geq 2$.

2. $PSL_n(\mathbb{F}_q)$ פשוטה פרט למקרים
$PSL_n(\mathbb{F}_2)$, $PSL_n(\mathbb{F}_3)$

א׳ 2: החבורות הסימפלקטיות

K - שדה, $char(K)\neq 2$.

עבור $g\in GL_n(K)$ נסמן ${}^Tg^n$, $n\in\mathbb{Z}$

להיות העלאה בחזקה ולקיחת transpose, פעולות מתחלפות!

$GL_n(K)$ פועלת על $Mat_n(K)$ ע״י חפיפה

$g*S={}^TgSg$; $Mat_n(K)=Sym_n(K)\oplus \underbrace{Skew_n(K)}_{\text{מטריצות אנטי-סימטריות}}$

הפעולה שומרת על הפיכות ואנטי סימטריות/סימטריות.

$$J_{2n}:=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

החבורה הסימפלקטית - $Sp_{2n}(K)$

$$Sp_{2n}(K):=Stab_{GL_{2n}(K)}(J_{2n})=\{g\in GL_{2n}(K) \mid {}^TgJ_{2n}g=J_{2n}\}$$

החבורה הסימפלקטית הפרויקטיבית - $PSp_{2n}(K)$

$$PSp_{2n}(K):=Sp_{2n}(K)/Z(Sp_{2n}(K)) \quad ; \boxed{Z(Sp_{2n}(K))=\{\pm I_{2n}\}}$$

(תרגיל)

ומתקיים $\boxed{Sp_2(K)=SL_2(K)}$ (תרגיל)

(תרגיל) $\boxed{\left\{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^Tg^{-1}\end{pmatrix} \middle| g\in GL_n(K)\right\}}, \boxed{\left\{\begin{pmatrix} I_n & X \\ 0 & I_n\end{pmatrix} \middle| X\in Sym_n(K)\right\}} < Sp_{2n}(K)$

תת-חבורות (נורמליות?)

בלשון מרחבים וקטוריים:

V מ״ו מעל K, $b: V\times V\longrightarrow K$

תבנית בילינארית אנטי-סימטרית

לא מנוונת

(לא מנוונת: $V \xrightarrow{\sim} Hom_K(V,K)$, $v\longmapsto (u\longmapsto b(v,u))$ איזומורפיזם)

(מאי-ניוון במימד סופי נובע $dimV=2n$

קיים בסיס ל- V $\{v_1, \ldots, v_n, v_{-1}, \ldots, v_{-n}\}$

כך ש

$$b(v_i, v_j) = 0$$

$$b(v_{-i}, v_{-j}) = 0$$

$$b(v_i, v_{-j}) = \delta_{i,j}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} b(v_i, v_j) & b(v_i, v_{-j}) \\ \hline b(v_{-i}, v_j) & b(v_{-i}, v_{-j}) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$$

$$Sp(V, b) := \left\{ T \in Aut_K V \;\middle|\; \begin{array}{l} b(T(u), T(v)) \\ = b(u, v) \\ u, v \in V \text{ לכל} \end{array} \right\}$$

כיצד נראית העתקה בילינארית:

$$b(u, v) = {}^t[u]_B \big(b(u_i, u_j) \big) [v]_B$$

<u>משפט:</u> $PSp_{2n}(K)$ פשוטה לכל $2 \leq n$

פרט ל- $PSp_4(\mathbb{F}_2)$

$(char\, K = 2)$ אפשר להגדיר ל- $Sp_{2n}(K)$ (ביחס ל- J_{2n})

<u>משפט (לא טריוויאלי ...לתרגיל)</u> $Sp_{2n}(K) \subset SL_{2n}(K)$

א'3: החבורות האורתוגונליות

$\operatorname{char} K \neq 2$.

$S \in M_n(K)$ הפיכה וסימטרית.

$$GL_n(K) \curvearrowright M_n(K)$$

$$g \mapsto (S \mapsto {}^t g S g)$$

- מיון מחלקות החפיפה תלוי בשדה.

(פינלציה 2) S חופפת למטריצה אלכסונית "סימלכן"

- אם K סגור אלגברית (מספיק: כל מספר הוא ריבוע) אז S חופפת ל- I_n.
- $K=\mathbb{R} \Rightarrow S$ חופפת ל- $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ (סילבסטר)

אני מתעניין במקרים הבאים:

$$\boxed{\underset{n=2l+1}{\begin{pmatrix} & & I_l \\ & 1 & \\ I_l & & \end{pmatrix}} \qquad \underset{n=2l}{\begin{pmatrix} & I_l \\ I_l & \end{pmatrix}}}$$

* החבורה האורתוגונלית (תלויה במחלקת החפיפה של S)

החבורות הקלאסיות

$$O_n(K,S) := \{ g \in GL_n(K) \mid {}^t g S g = S \}$$

מרכז $Z(O_n) = \{\pm I_n\}$; $SO_n(K,S) = O_n(K,S) \cap SL_n(K)$

חבורת הקומוטטורים $\Omega_n(K) = [O_n(K,S), O_n(K,S)]$

$$\Omega_n(K) \subseteq SO_n(K)$$

$$Z(\Omega_n(K)) = \Omega_n(K) \cap \{\pm I_n\}$$

משפט: $\Omega_n(K) / Z(\Omega_n(K))$ פשוטה לכל $n \geq 5$.

יוכח בסוף כמקרה פרטי של חבורות chevally.

= הקורס מתחיל עכשיו =

פרק ב': חבורות Weyl

ב' 1: מערכות שורשים (root systems)

$(V, (\cdot,\cdot))$ מרחב מכפלה פנימית ממימד l מעל $\mathbb{R}$.

W_u השיקוף (reflection) של V,
המתאים לוקטור $u \neq 0$

לכל $v \perp u$:
$$\begin{cases} W_u(v) = v \\ W_u(u) = -u \end{cases}$$

$$\Leftarrow \boxed{W_u(v) = v - \frac{2\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle} \cdot u}$$

הגדרה: $\Phi \subseteq V$ קבוצה סופית של וקטורים $\neq 0$.
נאמר כי Φ $\boxed{\text{מערכת שורשים}}$ ב-V אם:

א. Φ פורשת את V.

ב. $W_u(\Phi) \subseteq \Phi$ לכל $u \in \Phi$.

ג. $\frac{2\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle} \in \mathbb{Z}$ לכל $u,v \in \Phi$.

ד. אם $u, \lambda u \in \Phi$ אז $\lambda = \pm 1$.

Scanned by CamScanner

דוגמאות:

(1 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{l+1}\} \subseteq \mathbb{R}^{l+1}$ הבסיס הסטנדרטי.

$V=\left\{\sum_{i=1}^{l+1} x_i e_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{l+1} x_i=0\right\}$ כאשר מעל $\mathbb{R}$ ממימד l.

עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

$$\Phi=\{e_i-e_j\}_{1\le i\neq j\le l+1}$$

זו מערכת שורשים, מסומנת A_l

(בדיקה:

א. ברור. (פורשת)

ב. $i\neq j$, $r\neq s$

$$\frac{2\langle e_i-e_j, e_r-e_s\rangle}{\|e_i-e_j\|^2} = \langle e_i-e_j, e_r-e_s\rangle$$

$$=\delta_{i,r}-\delta_{i,s}-\delta_{j,r}+\delta_{j,s} \in \mathbb{Z}$$

קרונקר

ג.

$$W_{e_i-e_j}(e_r-e_s) = e_r-e_s-(\delta_{i,r}-\delta_{i,s}-\delta_{j,r}+\delta_{j,s})(e_i-e_j)$$

$$=\begin{cases} e_r-e_s & j,i \neq r,s \\ e_r-e_s-2(e_r-e_s) = e_s-e_r & \begin{pmatrix} i=r \\ j=s \end{pmatrix} \; \begin{matrix} j\neq r \\ i\neq s \end{matrix} \\ e_r-e_s-(e_r-e_j) = e_j-e_s & \begin{pmatrix} i=r \\ j\neq s \end{pmatrix} \end{cases}$$

ד. ברור $\lambda(e_i-e_j)=e_r-e_s \iff \lambda=\pm 1$.

2) $V=\mathbb{R}^l$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית.

$$\Phi=\{\pm e_i \pm e_j\}_{1\le i<j\le l} \cup \{\pm e_i\}_{1\le i\le l}$$

זו מערכת שורשים ומסומנת B_l

($2l^2$ שורשים)

ניתן לכתוב את Φ גם כך:

$$\Phi=\left\{ v=\sum_{i=1}^{l} x_i e_i \;\middle|\; \begin{matrix} x_i\in\mathbb{Z}, \\ \|v\|^2\in\{1,2\}\end{matrix} \right\}$$

נבדוק כי מערכת שורשים:

א. ברור כי Φ פורשת את $\mathbb{R}^l$.

ב. $u,v\in\Phi \Rightarrow \frac{2\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}=\langle u,v\rangle \,/\, 2\langle u,v\rangle \in\mathbb{Z}$

ג. $u,v\in\Phi \Rightarrow W_u(v)=\underbrace{v-\frac{2\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}u}_{\in\mathbb{Z}}\in\sum_{i=1}^{l}\mathbb{Z}e_i$

$$\|W_u(v)\|^2=\underbrace{\|v\|^2}_{=1,2} \Rightarrow W_u(\Phi)\subseteq\Phi$$

ד. ברור.

3) $V=\mathbb{R}^l$; $\Phi=\{\pm e_i \pm e_j\}_{1\le i<j\le l} \cup \{\pm 2e_i\}$

זו מערכת שורשים (תרגיל) מסומנת C_l

4) $V=\mathbb{R}^l$; $\Phi=\{\pm e_i \pm e_j\}_{1\le i<j\le l}$

זו מערכת שורשים (תרגיל) מסומנת D_l

ומכאן, במובן מסוים (עבור החישוב) כל השאר "יוצאות קופץ"

$$V=\left\{\sum_{i=1}^{3} x_i e_i \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \sum_{i=1}^{3} x_i = 0\right\} \quad (5$$

$$\Phi=\left\{ e_i - e_j \right\}_{1\le i\neq j\le 3} \cup \left\{ \pm\left(2e_i - e_j - e_k\right)\right\}_{i,j,k \text{ שונים}}$$

זו מערכת שורשים, מסומנת G_2.

(12 שורשים)

נראה כי
$$\Phi=\left\{ v=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 \,\middle|\, \begin{array}{l} x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z} \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ \|v\|^2\in\{2,6\}\end{array}\right\}$$

כעת נבדוק כי Φ מערכת שורשים:

א. ברור, Φ פורשת את V.

ג.
$$\frac{2\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} \underset{u=e_i-e_j}{=} \langle u,v\rangle \in \mathbb{Z}$$

$$\underset{u=2e_i-e_j-e_k}{=} \frac{\langle 2e_i-e_j-e_k, v\rangle}{3} \in \mathbb{Z}$$

(ניקח תמיד)

ב. $W_u(v)=v-\frac{2\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}\in \mathbb{Z}e_1+\mathbb{Z}e_2+\mathbb{Z}e_3$

אבל W_u איזומטריה:

$$\|W_u(v)\|^2=\|v\|^2\in\{2,6\}$$

ד. פשוט לבדוק..

Scanned by CamScanner