חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

5 ביוני 2017

טענה 0.1 יהי Ω תחום ז'ורדן, $f:\Omega\to(0,\infty)$ עם תומך קומפקטי ורציפה. נגדיר

$$V_c=\{x\in\Omega\mid f(x)\geq c\}$$

אזי

$$\int_0^\infty \mathrm{vol}_n(V_c)\,\mathrm{d}c=\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

הוכחה: עבור $t>0$ נגדיר

$$G=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid f(x)\geq t\right\}$$

ועכשיו מפוביני

$$\int_G \mathrm{d}y=\int_0^\infty\left(\int_{\{f(x)\geq t\}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

■

תרגיל נתונות $u,v\in C^2(G)$, כאשר G תחום חסום. נניח כי $u\mid_{\partial G}=v\mid_{\partial G}$ (כולל נגזרת נורמלית) וכי u הרמונית. הראו כי

$$\int_G|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\leq\int_G|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x$$

ניסוח שקול - אם u כזו, ואם $f\in C_C^2(G)$ (כלומר יש לה תומך קומפקטי בתוך G - $f=0$ על השפה וגם $\frac{\partial f}{\partial n}=0$ על השפה) אזי

$$\int_G|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\leq\int_G|\nabla(u+f)|^2\,\mathrm{d}x$$

פתרון מספיק להראות

$$\int\limits_G |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}x + 2\int\limits_G \langle \nabla u, \nabla f\rangle \, \mathrm{d}x \geq 0$$

אבל האינטגרל השמאלי תמיד אי שלילי, ויכול להיות קטן כמה שנרצה. לכן אין ברירה אלא להראות

$$\int\limits_G \langle \nabla u, \nabla f\rangle \, \mathrm{d}x \geq 0$$

מנוסחת גרין השנייה נקבל

$$\int\limits_G \langle \nabla u, \nabla f\rangle \, \mathrm{d}x = -\int\limits_G f\Delta u \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\partial G} u\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n}$$

האינטגרל השמאלי מתאפס כי u הרמונית. הימני מתאפסת כי הנגזרת הנורמלית של f מתאפסת. לכן קיבלנו כי

$$\int\limits_G |\nabla (f+u)|^2 \, \mathrm{d}x = \int\limits_G |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int\limits_G |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}x$$

תרגיל חשבו שטח של רצועה ספירית:

$$\left\{x^2+y^2+z^2=R^2 \mid a<z<b\right\}$$

כאשר $-R \leq a < b \leq R$.

פתרון ניקח פרמטריזציה

$$x = R\cos\varphi\sin\theta, y = R\sin\varphi\sin\theta, z = R\cos\theta$$

כאשר $-\pi < \varphi < \pi, \frac{a}{R} \leq \cos\theta \leq \frac{b}{R}$. כעת נקבל שהנפח הוא

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{\cos^{-1}\left(\frac{b}{R}\right)}^{\cos^{-1}\left(\frac{a}{R}\right)} |r_\varphi \times r_\theta| \, \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

מתקיים

$$|r_\varphi \times r_\theta| = R^2\sin\theta$$

ואז אפשר לחשב.

תרגיל חשבו את שטח הפנים (נפח) של העל משטחים הבאים:

1. $0 \leq x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq a^2$ עם $x_4 = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

2. $0 \le x_1^2 + x_2^2 \le a^2$ עם $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$.

פתרון 1. נכתוב

$$\begin{aligned}
&x_4 = \varphi\left(x_1, x_2, x_3\right) \\
&B = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le a^2\right\}
\end{aligned}$$

לכן הנפח הוא

$$\int\limits_B \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \varphi_{x_2}^2 + \varphi_{x_3}^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{2}\mathrm{Vol}\left(B\right) = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}a^3$$

2. פרמטריזציה בקואורדינטות פולריות:

$$r\left(\rho, \theta, \varphi\right) = \left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)$$

כאשר $\theta, \varphi \in [-\pi, \pi]$, $\rho \in [0, a]$. אזי

$$\begin{aligned}
&D_r = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho\sin\varphi & \rho\sin\varphi \end{pmatrix} \\
&\sqrt{D_r D_r^T} = \sqrt{2}\rho^2
\end{aligned}$$

ואז נקבל שהנפח הוא

$$\int\limits_0^a \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2}\rho^2\, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho = \frac{4\pi^2\sqrt{2}}{3}a^3$$