

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

22 במאי 2017

### 1 נוסחאות גרין ופונקציות הרמוניות

יהי  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  תחום חסום,  $u, v \in C^2(\mathbb{R})$ . ניזכר כי

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

אזי מתקיימות נוסחאות גרין. נשתמש היום רק בשלישית, ולכן ניזכר רק אותה:

$$\int_G u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial G} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \, dS$$

כאשר  $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u, N \rangle$  - הנגזרת בכיוון הנורמל החיצוני. אמרנו כי  $u$  הרמונית אם  $\Delta u = 0$ , ואז ראינו תכונות של פונקציות הרמוניות:

1. עקרון הערך הממוצע.
2. עקרון המקסימום - אם פונקציה הרמונית על תחום חסום מקבלת מקסימום בשפה אז היא קבועה.
3. משפט ליוביל - אם פונקציה הרמונית על כל  $\mathbb{R}^n$  חסומה מלעיל או מלרע אז היא קבועה.

**תרגיל** יהיו  $u_1, u_2$  הרמוניות על  $\mathbb{R}^n$ . עבור  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  ועבור  $a > 0, b > 0$  נגדיר

$$L(a, b) = \int_{S^{n-1}} u_1(x_1 + ax) u_2(x_2 + bx) \, dS(x)$$

הראו כי אם  $ab = cd$  אזי  $L(a, b) = L(c, d)$ .

**פתרון** נגדיר

$$F(\lambda) = L(\lambda\rho, \lambda^{-1}\rho)$$

עבור  $\rho = \sqrt{ab}$ . כעת נרצה להראות כי  $F$  קבועה. נראה כי  $F' = 0$ . נגזור תחת סימן האינטגרל (הצדקה בסוף). נשים לב שהנורמל לספירה הוא  $n = x$ , ואז

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{S^{n-1}} u_1(x_1 + \lambda \rho x) u_2(x_2 + \lambda^{-1} \rho x) \, dS(x) \\ F'(\lambda) &= \int_{S^{n-1}} \langle \nabla u_1(x_1 + \lambda \rho x), \rho x \rangle u_2(x_2 + \lambda^{-1} \rho x) + \left\langle u_2, x_2 + \lambda^{-1} \rho x, \frac{-\rho}{\lambda^2} x \right\rangle u_1(x_1 + \lambda \rho x) \, dS(x) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{S^{n-1}} \langle \rho \lambda \nabla u_1(x_1 + \lambda \rho x), n \rangle u_2(x_2 + \lambda^{-1} \rho x) - \left\langle \frac{\rho}{\lambda} \nabla u_2(x_2 + \lambda^{-1} \rho x), n \right\rangle u_1(x_1 + \lambda \rho x) \, dS(x) = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial u_1(x_1 + \lambda \rho x)}{\partial n} u_2(x_2 + \lambda^{-1} \rho x) - \frac{\partial u_2(x_2 + \lambda^{-1} \rho x)}{\partial n} u_1(x_1 + \lambda \rho x) \, dS = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{B_0(1)} u_2(x_2 + \lambda^{-1} \rho x) \overline{\Delta u_1(x_1 + \lambda \rho x)} - u_1(x_1 + \lambda \rho x) \overline{\Delta u_2(x_2 + \lambda^{-1} \rho x)} \, dx = \\ &= 0 \end{aligned}$$

הצדקת הגזירה תהיה התרגיל הבא הביתה:

**תרגיל** אם  $F(\lambda, x) \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$  נגדיר

$$g(\lambda) = \int_{S^{n-1}} F(\lambda, x) \, dS(x)$$

אזי גזירה וכן

$$g'(\lambda) = \int_{S^{n-1}} \frac{d}{d\lambda} (f(\lambda x)) \, dS(x)$$

"המישור יותר נחמד - הוא שדה, כי הוא  $\mathbb{C}$ " - המתרגל

"מה עם  $\mathbb{R}^4$ ?" - סטודנטית

" $\mathbb{R}^4$  זה משהו מוזר, זה לא קומוטטיבי, יש קוורטניונים, הם מפחידים אותי, אני

לא רוצה לדבר עליהם" - המתרגל

**תרגיל** (אינטגרל פואסון) תהי  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $n > 2$ , עם תומך קומפקטי. הראו כי

$$u(x) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta u(w)}{|x-w|^{n-2}} \, dw$$

**פתרון** נקבע  $x$ , ונגדיר

$$v(w) = |x-w|^{2-n}$$

פונקציה זו הרמונית בכל  $\mathbb{R}^n \setminus \{x\}$  (יהיה בשיעורי הבית). עבור  $\varepsilon > 0$  קטן מאוד ועבור  $R > 0$  גדול מאוד, נגדיר  $G = B(x, R) \setminus B(x, \varepsilon)$ . מתקיים

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \pm \frac{n-2}{|w-x|^{n-1}}$$

כאשר הכיוון הוא מינוס בשפה הגדול, ופלוס בגדולה. מנוסחת גרין השלישית (ניזכר כי  $v$  הרמונית ולכן  $\Delta v = 0$ ) מקבלים, על ידי בחירת  $R$  גדול מספיק, שמתקיים,

$$-\int_G v \Delta u = \underbrace{\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}} \int_{|w-x|=\varepsilon} u(w) \, dS}_{\rightarrow v_{n-1} u(x)(n-2)} - \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{|w-x|=\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS}_{\leq c\varepsilon \rightarrow 0}$$

נשים לב שבאגף שמאל כתוב את מה שרצינו, אז צריך רק להעביר את הקבועים לצד השני.