חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

15 במאי 2017

תרגיל תהי $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, $0\neq a\in\mathbb{R}^3$. אזי

$$2\pi\int\limits_{-1}^{1}F\left(\left|a\right|t\right)\,\mathrm{d}t=\int\limits_{S^2}F\left(\left\langle x,a\right\rangle\right)\,\mathrm{d}S\left(x\right)$$

טענה 0.1 אם $h:S^2\to\mathbb{R}$, T העתקה אורתוגונלית, אזי

$$\int\limits_{S^2}h\left(Tx\right)\,\mathrm{d}S\left(x\right)=\int\limits_{S^2}h\left(x\right)\,\mathrm{d}Sx$$

הוכחה: נסמן $r\left(\varphi,\theta\right)=\left(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta\right)$ פרמטריזציה של S^2. נסמן

$$q=T\circ r$$

q גם היא פרמטריזציה. נחשב ונקבל

$$D_q=T\circ D_r$$
$$\sqrt{\det\left(D_q^TD_q\right)}=\sqrt{\det\left(D_r^TT^TTD_r\right)}=\sqrt{\det\left(D_r^TD_r\right)}$$

כעת נקבל

$$\begin{aligned}\int\limits_{S^2}h\left(x\right)\,\mathrm{d}S\left(x\right)&=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}h\left(q\left(\varphi,\theta\right)\right)\sqrt{\det\left(D_q^tD_q\right)}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\\&=\int\limits_{-\pi}^{\pi}h\left(T\left(r\left(\varphi,\theta\right)\right)\right)\sqrt{\det\left(D_r^TD_r\right)}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\\&=\int\limits_{S^2}h\left(T\left(x\right)\right)\,\mathrm{d}S\left(x\right)\end{aligned}$$

■

כעת כדי לפתור את התרגיל אפשר לשנות את a להיות ווקטור מהצורה $\left(0,0,\left|a\right|\right)$ על ידי העתקה אורתוגונלית, ואז להשתמש בפרמטריזציה ולקבל את הדרוש.

1 משפט הדיברגנץ

ראינו בשיעור כל מיני הגדרות. נעשה רשימה.

הגדרה 1.1 1. שדה ווקטורי זו פונקציה חלקה $F : U \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

2. אם F שדה ווקטורי אזי

$$\mathrm{div} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \mathrm{Tr}\left(D_F\left(x\right)\right)$$

3. אם M יריעה $n-1$ מימדית, לוקחים נורמל (בדרך כלל חיצוני) N של M (מניחים שאפשר לבחור את N באופן רציף).

4. שטף של F דרך M הוא

$$\mathrm{Flux}_F\left(M\right) = \int\limits_{M} \left\langle F, N \right\rangle \, \mathrm{d}S$$

משפט 1.2 (משפט הדיברגנץ) יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>תחום</u> חסום, ויהי F שדה ווקטורי חלק על $\overline{U}$. ניקח $N\left(x\right)$ נורמל יחידה חיצוני של ∂U, שהיא יריעה $n-1$ מימדית. אזי

$$\int\limits_{\partial U} \left\langle F, N \right\rangle \, \mathrm{d}S = \int\limits_{U} \mathrm{div} F \, \mathrm{d}x$$

תרגיל נתון אליפסואיד

$$E = \left\{ \left(x_1, x_2, x_3\right) \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

עבור $x \in \partial E$, נסמן $\rho\left(x\right)$ את המרחק מראשית הצירים למישור האפיני המשיק לשפה של E בנקודה x. חשבו

$$\int\limits_{\partial E} \rho \, \mathrm{d}S$$

$$\int\limits_{\partial E} \frac{1}{\rho} \, \mathrm{dS}$$

פתרון נסמן $N\left(x\right)$ את נורמל היחידה החיצוני של ∂E בנקודה x. נסמן θ את הזווית בין הווקטור x לאנך דרך הראשית לווקטור N נקבל

$$\cos\theta = \frac{\rho}{\left|x\right|}$$

כלומר נקבל

$$\rho = \langle x, N \rangle$$

נכתוב $R(x) = x$ שדה ווקטורי. אזי

$$\int_{\partial E} \rho \, \mathrm{d}S = \int_{\partial E} \langle R, N \rangle \, \mathrm{d}S = \int_E \mathrm{div} R \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 = 3\mathrm{Vol}(E) =$$
$$= 4\pi abc$$

נעבור לחשב את האינטגרל השני. נסמן $\Phi(x) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2}$. אזי

$$\nabla \Phi(x) = 2\left(\frac{x_1}{a^2}, \frac{y_1}{b^2}, \frac{c_1}{c^2}\right)$$

ואז $N(x) = \frac{\nabla\Phi(x)}{|\nabla\Phi(x)|}$. אזי

$$\rho = \langle x, N \rangle = \frac{2}{|\nabla\Phi(x)|} \left\langle (x_1, x_2, x_3), \left(\frac{x_1}{a^2}, \frac{x_2}{b^2}, \frac{x_3^2}{c^2}\right) \right\rangle = \frac{2}{|\nabla\Phi(x)|}$$
$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\nabla\Phi(x)|}{2} = \left\langle \frac{1}{2}\nabla\Phi(x), \frac{\nabla\Phi(x)}{|\nabla\Phi(x)|} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\nabla\Phi, N \right\rangle$$

נסמן $q = \frac{1}{2}\nabla\Phi$. נקבל

$$\mathrm{div} q = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

ואז ממשפט הדיברגנץ

$$\int_{\partial E} \frac{1}{\rho} = \int_E \mathrm{div} q \, \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \frac{4}{3}\pi abc$$