חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ארזים ©

8 במאי 2017

1 אינטגרציה על יריעות

בהינתן $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, $f : M \to \mathbb{R}$ פונקציה בעלת תומך קומפקטי, ומפה $r : U \to M$ המקיימת $\text{supp} f \subseteq r(U) \subseteq M$, מגדירים

$$\int\limits_M f = \int\limits_U (f \circ r) \sqrt{\Gamma(r_{u_1}, \ldots, r_{u_k})} = \int\limits_U (f \circ r) \sqrt{\det D_r^t D_r}$$

טענה 1.1 ההגדרה הזו לא תלויה בבחירת המפה r.

הוכחה: נבחר שתי מפות $r_i : U_i \to M$ עם

$$\text{supp}(f) \subseteq r_i(U_i) \subseteq M$$

נסמן

$$V = r_1(U_1) \cap r_2(U_2)$$

כעת V פתוחה ומקיימת

$$\text{supp}(f) \subseteq V \subseteq M$$

נסמן גם

$$U_j' = r_j^{-1}(V) \subseteq U_j$$

ראינו כי $\varphi = r_2^{-1} \circ r_1 : U_1' \to U_2'$ היא דיפאומורפיזם. נגזור:

$$r_1 = r_2 \circ \varphi$$
$$D_{r_1} = D_{r_2} \cdot D_\varphi$$

נחשב:

$$\int\limits_{U_2} (f\circ r_2)\sqrt{\det D_{r_2}^t D_{r_2}} = \int\limits_{U_2'} (f\circ r_2)\sqrt{\det D_{r_2}^t D_{r_2}} = \int\limits_{\varphi^{-1}\left(U_2'\right)} (f\circ r_2\circ\varphi)\sqrt{\det D_{r_2}^t D_{r_2}}\underbrace{\left|\det D_\varphi\right|}_{\sqrt{\det D_\varphi^t \det D_\varphi}} =$$

$$= \int\limits_{U_1'} (f\circ r_1)\sqrt{\det\left(D_\varphi^t D_{r_2}^t D_{r_2} D_\varphi\right)} = \int\limits_{U_1'} (f\circ r_1)\sqrt{\det\left(D_{r_1}^t D_{r_1}\right)}$$

ולכן ההגדרה לא תלויה בבחירת המפה. ■

2 נוסחת קו־שטח (פוביני עקום)

יהי $V\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום, $\Phi:V\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה C^1, כך שלכל $x\in V$ מתקיים

$$\nabla\Phi(x)\neq 0$$

נסמן $\Phi(V)=(a,b)$. לכל $c\in(a,b)$ נגדיר

$$M_c=\{x\in V\mid\Phi(x)=c\}$$

משפט 2.1 אם $f:V\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן עם תומך קומפקטי בתוך V אזי

$$\int\limits_V f=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{M_c}\frac{f(x)}{|\nabla\Phi(x)|}\,\mathrm{d}S(x)\right)\mathrm{d}c$$

הערה 2.2 אם אין לפונקציה f תומך קופקטי נשתמש בנוסחה עבור

$$f\cdot\mathbb{1}_{(a+\varepsilon,b-\varepsilon)}$$

וניקח גבול כאשר $\varepsilon\to 0$.

דוגמא נסמן $B=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x|<1\}$. ניקח

$$V=r\cdot B, r>0$$

וכן

$$\Phi(x)=|x|$$
$$\nabla\Phi(x)=\frac{x}{|x|}$$
$$|\nabla\Phi(x)|=1$$

לכן אם f אינטגרבילית רימן מתקיים (ונראה בתרגיל הבית בצורה אחרת):

$$\int\limits_{rB} f=\int\limits_0^r\left(\int\limits_{\rho S^{n-1}} f\left(x\right)\,\mathrm{d}S\left(x\right)\right)\,\mathrm{d}\rho=\int\limits_0^r\rho^{n-1}\left(\int\limits_{S^{n-1}} f\left(\rho y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}\rho$$

תרגיל חשבו את הנפח של $S^{n-1}\subseteq\mathbb{R}^n$.

פתרון נקבע $0<\varepsilon<r$. נשתמש בנוסחת הקו־שטח עבור

$$f\left(x\right)=e^{-\left|x\right|^2}\cdot\mathbb{1}_{\left(\varepsilon,r\right)}\left(\left|x\right|\right)$$

מהנוסחה הקודמת:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f=\int\limits_\varepsilon^r\rho^{n-1}\left(\int\limits_{S^{n-1}} f\left(\rho y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}\rho=\int\limits_\varepsilon^r\rho^{n-1}e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\underbrace{\int\limits_{S^{n-1}}\mathrm{d}y}_{V\left(S^{n-1}\right)}$$

לכן הנפח הוא

$$\begin{aligned}V\left(S^{n-1}\right)&=\frac{\int_{\mathbb{R}^n} f}{\int_\varepsilon^r\rho^{n-1}e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho}\xrightarrow[r\to\infty]{\varepsilon\to0}=\frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left|x\right|^2}}{\int_0^\infty\rho^{n-1}e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho}=\\&=\cdots=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\end{aligned}$$