

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

24 באפריל 2017

תרגיל (ממבחן של לב) יהיו $M, N \subseteq \mathbb{R}^3$ משטחים (יריעות ממימד 2), ונניח כי $M \cap N = \{x\}$. הראו כי $T_x M = T_x N$.

פתרון תהי $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ותהיינה $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$\nabla G|_{U \cap N}, \nabla F|_{U \cap M} \neq 0$$

וכן

$$M \cap U = \{F = 0\}$$

$$N \cap U = \{G = 0\}$$

כעת, $T_x M = (\nabla F)^\perp$, $T_x N = (\nabla G)^\perp$. אם $\nabla F, \nabla G$ תלויים לינארית נסיים. נניח בשלילה שהם לא תלויים לינארית. נגדיר

$$H(y) = (F(y), G(y))$$

מההנחה, $D_x H$ היא מדרגה מלאה, ולכן $\{y \mid H(y) = (0, 0)\}$ היא יריעה ממימד 1, בסתירה לכך שמתקיים

$$\{y \mid H(y) = (0, 0)\} \cap U = \{x\}$$

תרגיל תהי $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אזי:

1. בעלת תומך קומפקטי בתוך A אם ורק אם קיימת $K \subseteq A$ קופקטית עם $f|_{A \setminus K} = 0$.

2. אם A פתוחה וכן f בעלת תומך קופקטי בתוך A , אזי קיימת $K \subseteq A$ מדידה זורדן וקומפקטית.

פתרון 1 ברור. נפתור את 2. תהי f בעלת תומך קומפקטי K בתוך קבוצה פתוחה A . לכל $x \in K$ קיימת תיבה

פתוחה B_x המקיימת $\overline{B_x} \subseteq A, x \in B_x$ קופקטית, ואוסף אותן B_x הוא כיסוי פתוח של K , ולכן קיים לו תת כיסוי סופי $\{B_{x_j}\}_{j=1}^N$. נגדיר

$$K' = \bigcup_{j=1}^n \overline{B_{x_j}} \subseteq A$$

ברור כי K' קופקטית, כאיחוד סופי של קופקטיות, ומדידה ז'ורדן כאיחוד סופי של תיבות. לכן סיימנו.

שאלה האם כל קבוצה קופקטית (או פתוחה) היא מדידה ז'ורדן?

תשובה לא! ניקח $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, ותהי $\{q_n\}$ מנייה של E . נגדיר

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)$$

אזי A פתוחה, $[0, 1] \setminus A$ קופקטית, ושתיהן אינן מדידות ז'ורדן.

הרעיון (כתרגיל) נשים לב כי $J_n = \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right)$ מקיימות $A = \bigcup J_n$. ניתן לכסות את A על ידי אינטגרולים שסכום אורכייהם 2ε . מצד שני, A צפופה בתוך $[0, 1]$ ולכן $\overline{A} = [0, 1]$ פתוחה, ולכן

$$\overline{A} = A \cup \partial A$$

אם A מדידה ז'ורדן, אזי לכל $\delta > 0$ ניתן לכסות את ∂A על ידי קטעים $\{I_j\}$ שסכום אורכייהם לכל היותר δ . מצאו את הסתירה.

תרגיל תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית ותהי $E \subseteq M$ קבוצה. נניח שקיימת משפה של מפות $r_\alpha : V_\alpha \rightarrow M$, כאשר $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחות, וכן לכל α מתקיים $r_\alpha^{-1}(E) \subseteq \mathbb{R}^k$ זניחה, עם $E \subseteq \bigcup r_\alpha(V_\alpha)$. הוכיחו כי זניחה בתוך M .

פתרון נראה שלכל V פתוחה ולכל מפה $r : V \rightarrow M$ מתקיים $r^{-1}(E) \subseteq \mathbb{R}^k$ זניחה. נקבע V פתוחה, $r : V \rightarrow M$, לכל $x \in r^{-1}(E)$ קיים α עבורו $x \in r_\alpha(V_\alpha)$ ונניח $r(x) \in r_\alpha(V_\alpha)$ אזי קיימת תיבה ראצינאלית $Q_x \subseteq V$ עם $x \in Q_x \subseteq V$ ולכן $r(Q_x) \subseteq r_\alpha(V_\alpha)$ ולכן

$$Q_x \cap r^{-1}(E) = r^{-1} \circ r_\alpha \left(r_\alpha^{-1}(r(Q_x) \cap E) \right)$$

ממשפט מהכיתה, $r^{-1} \circ r_\alpha$ היא דיפאומורפיזם. כמו כן

$$r_\alpha^{-1} \left(\underbrace{E \cap r(Q_x)}_{\subseteq E} \right) \subseteq r_\alpha^{-1}(E)$$

הקבוצה הימנית זניחה, ולכן גם השמאלית. נסיק כי לכל $x \in r^{-1}(E)$ הקבוצה $Q_x \cap r^{-1}(E)$ זניחה (דיפאומורפיזם משמר זניחות). לכן גם $r_\alpha^{-1}(E) \subseteq \mathbb{R}^k$ זניחה (איחוד בן מניה של זניחות הוא זניח).

תרגיל תהי $\gamma = (f(u), g(u))$ עקומה במישור xz בתוך \mathbb{R}^3 . נניח כי $f > 0$. נסובב את γ סביב ציר z ונקבל משטח R המיוצג על ידי הפרמטריזציה

$$r(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

1. חשבו מישור משיק בנקודה $r(u_0, v_0)$.

2. חשבו ווקטור נורמל בנקודה $r(u_0, v_0)$.

פתרון 1. מחשבים ומקבלים

$$T_x R = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} f' \cos v \\ f' \sin v \\ g' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \sin v \\ -f \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. מסמנים $\vec{n} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$, ואז הנורמל הוא $\pm \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. התוצאה היא

$$\vec{n} = (-g' f \cos v, -g' f \sin v, f f')$$