

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

20 במרץ 2017

תזכורת תהי $f : A \rightarrow B$ נאמר כי f רציפה בנקודה a אם

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

תזכורת תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $W \subseteq A$. נאמר כי W פתוחה יחסית בתוך A אם קיימת $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה כך שמתקיים $W = A \cap U$. למשל, $[0, 1)$ פתוחה יחסית בקטע $[0, \infty)$ כי

$$(-1, 1) \cap [0, \infty) = [0, 1)$$

תרגיל יהיו $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ קבוצות, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow B$ אזי f רציפה בקבוצה A אם ורק אם לכל קבוצה $S \subseteq B$ פתוחה יחסית, $f^{-1}(S) \subseteq A$ פתוחה יחסית.

פתרון בכיוון הראשון, יהי $a \in A$ ויהי $\varepsilon > 0$. נגדיר

$$S = B_\varepsilon(f(a)) \cap B = \{y \in B \mid d(y, f(a)) < \varepsilon\}$$

S פתוחה יחסית בתוך B . מההנחה, הקבוצה $f^{-1}(S)$ פתוחה יחסית בתוך A ובנוסף $a \in f^{-1}(S)$. לכן קיימת $\delta > 0$ כך שמתקיים

$$B_\delta(a) \cap A = \{x \in A \mid d(x, a) < \delta\} \subseteq f^{-1}(S)$$

בכיוון השני, נניח כי f רציפה בתוך A , ותהי $S \subseteq B$ פתוחה יחסית. יהי $a \in f^{-1}(S)$. נרצה להראות שקיימת $\delta > 0$ כך שמתקיים

$$B_\delta(a) \cap A = \{x \in A \mid d(x, a) < \delta\} \subseteq f^{-1}(S)$$

S פתוחה יחסית, וכן $f(a) \in S$, ולכן קיים $\varepsilon > 0$ עבורו

$$B_\varepsilon(f(a)) \cap B = \{y \in B \mid d(y, f(a)) < \varepsilon\} \subseteq S$$

מרציפות קיימת $\delta > 0$ עבורה מה שרצינו מתקיים.

סימונים מטריצות מסדר n :

$$M_{n \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$$

מטריצות סימטריות מסדר n :

$$M_{n \times n}^s(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{n^2+n}{2}}$$

מטריצות אנטיסימטריות מסדר n :

$$M_{n \times n}^{as}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\frac{n^2-n}{2}}$$

מטריצות אורתוגונליות מסדר n :

$$O_n$$

תרגיל מצאו הצגה שתומה עבור O_n , כלומר מצאו העתקה

$$F: \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{n^2+n}{2}}$$

כאשר F רגולרית על O_n (הדיפרנציאל של F מדרגה מקסימלית) וכן $O_n = F^{-1}(0)$.

פתרון ניזכר כי $A \in O_n$ אם ורק אם

$$AA^t = I$$

נגדיר כעת:

$$F(A) = AA^t - I$$

נשים לב שהתמונה היא תמדי מטריצה סימטרית: אפשר לחשוב על F בתור

$$F: M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}^s$$

כמו כן

$$F^{-1}(0) = O_n$$

נגזור את ההעתקה בנקודה $A \in O_n$ בכיוון B :

$$\begin{aligned} D_B F(A) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(A+Bh) - F(A)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(A+Bh)(A+Bh)^t - I - AA^t + I}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hBA^t + hAB^t + h^2BB^t}{h} = BA^t + AB^t = BA^t + (BA^t)^t \end{aligned}$$

כעת נקבל כי $D_B F(A) = 0$ אם ורק אם BA^t אנטיסימטרית. לכן

$$\ker(DF(A)) = \{B \in M_{n \times n} \mid BA^t \in M_{n \times n}^{as}\}$$

לקחנו $A \in O_n$, לכן A הפיכה, ולכן $\dim \ker(DF(A)) = \frac{n^2+n}{2}$,

$$F : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{n^2+n}{2}}$$

וכעת $\frac{n^2+n}{2} = n^2 - \frac{n^2-n}{2}$ ולכן הדיפרנציאל מדרגה מקסימלית כי הוא על.