חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

24 באפריל 2017

1 אינטגרציה על יריעות

הגדרה 1.1 תהי $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k מימדית, $r:V\to M$ מפה, $f:M\to\mathbb{R}$ פונקציה נוחה (כלומר $\mathrm{supp}\left(f\right)\subseteq r\left(V\right)$). נגדיר

$$\int\limits_{M}f=\int\limits_{M}f\,\mathrm{d}S=\int\limits_{V}\left(f\circ r\right)\cdot\sqrt{\Gamma\left(r_{q_{1}},\ldots,r_{q_{k}}\right)}\,\mathrm{d}q_{1}\ldots\mathrm{d}q_{k}$$

טענה 1.2 ההגדרה הזו לא תלוי במפה $r:V\to M$.

הוכחה: נראה בתרגול. ■

הגדרה 1.3 תהי $M\subseteq\mathbb{R}^{n}$ יריעה k מימדית, $f:M\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן על M. ראינו שאפשר לכתוב

$$f=\sum_{i=1}^{m}f_{i}$$

כאשר $f_{i}:M\to\mathbb{R}$ פונקציות נוחות ואינטגרביליות רימן על M. אזי נגדיר

$$\int\limits_{M}f=\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{M}f_{i}$$

טענה 1.4 ההגדרה האחרונה לא תלויה בבחירת הפירוק של הפונקציה לסכום של פונקציות נוחות.

הוכחה: נניח כי

$$\sum_{i=1}^{m}f_{i}=f=\sum_{j=1}^{p}g_{j}$$

אזי

$$\sum_{i=1}^{m} f_i - \sum_{j=1}^{p} g_j = 0$$

צריך להוכיח

$$\sum_{i=1}^{m} \int_M f_i + \sum_{i=1}^{p} \int (-g_j) = 0$$

יספיק לנו שנראה שאם $f_i : M \to \mathbb{R}$ פונקציות נוחות ואינטגרביליות רימן על M, המקיימות

$$\sum_{i=1}^{l} f_i = 0$$

על M, אזי גם

$$\sum_{i=1}^{l} \int_M f_i = 0$$

ראשית נניח שקיימת מפה $r : V \to M$ כך שלכל i מתקיים $\mathrm{supp} f_i \subseteq r(V)$. במקרה הזה הטענה נובעת.
במקרה הכללי נסמן

$$K = \bigcup_{i=1}^{l} \mathrm{supp}\,(f_i)$$

קיים פירוק יחידה $\varphi_1, \dots \varphi_q : K \to \mathbb{R}$ פונקציות נוחות אינטגרביליות רימן המקיימות

$$\sum_{j=1}^{q} \varphi_j = 1$$

על M.כעת,

$$\sum_{j=1}^{l} f_j \varphi_i = 0$$

מהמקרה שהוכחנו כבר, נקבל

$$\sum_{j=1}^{l} \int_M f_j \varphi_i = 0$$

לכל $1 \leq i \leq q$. נסכום על פני i:

$$\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{l}\int_M f_j\varphi_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{q}\int_M f_j q_i = 0$$

עבור j נתון מתקיים

$$\sum_{i=1}^{q} f_j\varphi_i = f_j$$

כמו כן $\operatorname{supp}\left(f_j\varphi_i\right) \subseteq \operatorname{supp}\left(f_j\right)$, ולכן שוב מהמקרה שכבר הראינו נקבל

$$0 = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{q}\int_M f_j q_i = \sum_j \int_M f_j$$

וסיימנו. ■

הגדרה 1.5 תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, ותהי $f : M \to \mathbb{R}$ כך שהקבוצה B_f של נקודת האי רציפות של f זניחה בתוך M. נאמר כי f אינטגרבילית על M (במובן של אינטגרל לא אמיתי) אם לכל מיצוי $E_j \uparrow M$ על ידי קבוות מדידות ז'ורדן בתוך M (כלומר $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ וכן $M = \bigcup E_j$) כך שעל כל E_j f חסומה, הגבול

$$\lim_{j\to\infty}\int_M f\cdot \mathbb{1}_{E_j}$$

קיים ואינו תלוי במיצוי.

טענה 1.6 (חישובית) תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, $f : M \to \mathbb{R}$ פונקציה עם קבוצה זניחה B_f של נקודות אי רציפות. יהיו $r_i : V_i \to M$, כאשר $1 \leq i \leq m$ מפות על M, זרות בזוגות (כלומר $r_i\left(V_i\right) \cap r_j\left(V_j\right) = \emptyset$), ונניח כי $S \subseteq M$ זניחה כך שמחוץ לקבוצה $S \cup \bigcup r_i\left(V_i\right)$ f מתאפסת. אזי

$$\int_M f = \sum_{i=1}^{m}\int_{V_i}\left(f\circ r_i\right)\sqrt{\Gamma\left(\left(r_i\right)_{q_1},\left(r_i\right)_{q_2},\ldots,\left(r_i\right)_{q_k}\right)}$$

כאשר כל האינטגרלים הם במובן הלא אמיתי.

לא נוכיח את הטענה הזו, אבל כן מותר לנו להשתמש בה.

הגדרה 1.7 נפח k מימדי: כאשר $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית, נגדיר

$$v_k\left(M\right) = \int\limits_M 1$$

אם M נתונה על ידי מפה אחת $r : V \to M$, כלומר $r\left(V\right) = M$, אזי

$$v_k\left(M\right) = \int\limits_M 1 = \int\limits_V \sqrt{\Gamma\left(r_{q_1}, \dots, r_{q_k}\right)}$$

1.1 יריעות חד מימדיות

נניח כי M נתונה על ידי מפה אחת, כלומר

$$M = \gamma\left(I\right)$$

כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוחה, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ (רגולרית, $\gamma : I \to r\left(I\right)$ הומיאומורפיזם). אזי

$$L\left(M\right) = v_1\left(M\right) = \int\limits_I \left|\dot{\gamma}\left(t\right)\right| \mathrm{d}t$$

ואם $f : M \to \mathbb{R}$ אזי

$$\int\limits_M f \,\mathrm{d}s = \int\limits_I \left(f \circ \gamma\right)\left(t\right)\left|\dot{\gamma}\left(t\right)\right| \mathrm{d}t$$

1.1.1 אורך גיאומטרי

תהי $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ רציפה. נסתכל על חלוקה π:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$$

כעת נגדיר

$$L\left(\gamma_\pi\right) = \sum_{i=0}^{N-1} \left|\gamma\left(t_{i+1}\right) - \gamma\left(t_i\right)\right|$$

ואז

$$\mathcal{L}\left(\gamma\right) = \sup_\pi L\left(\gamma_\pi\right)$$

וזה האורך הגיאומטרי. אם γ חלקה C^1 אזי

$$\mathcal{L}(\gamma)=\int\limits_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t$$

לעתים עקומה היא גרף של פונקציה $y=f(x)$, ואז $\gamma(x)=(x,f(x))$ והאורך הוא

$$L(\gamma)=\int\limits_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

אם העקומה נתונה בקואורדינטות פולריות, למשל $r=r(\theta)$, כלומר $\gamma(\theta)=(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$. כאשר $\alpha\le\theta\le\beta$. אז האורך הוא

$$L(\gamma)=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

1.2 יריעות דו מימדיות בתוך $\mathbb{R}^3$

יהי $M\subseteq\mathbb{R}^3$ משטח חלק, ונתון על ידי מפה אחת $r:\Omega\to\mathbb{R}^3$ כאשר $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום. השטח של M הוא

$$A(M)=v_2(M)=\iint\limits_\Omega |r_u\times r_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_\Omega \sqrt{\Gamma(r_u,r_v)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

וכן אם $h:M\to\mathbb{R}$ אזי

$$\iint\limits_M h\,\mathrm{d}S=\iint\limits_\Omega (h\circ r)\,|r_u\times r_v|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

אם M היא גרף של פונקציה $z=f(x,y)$, ניקח את הפרמטריזציה הסטנדרטית $r(x,y)=(x,y,f(x,y))$. אזי

$$|r_x\times r_y|=\sqrt{1+|\nabla f|^2}=\frac{1}{\cos\psi}$$

כאשר ψ היא הזווית בין הנורמל $N=(-f_x,-f_y,1)$ למשטח לבין ציר z (או הווקטור $(0,0,1)$).

אם M נתון על ידי משוואה $F(x,y,z)=0$, כאשר F רגולרית על M, אזי

$$\sqrt{1+|\nabla f|^2}=\frac{|\nabla F|}{|F_z|}$$

את זה נשאיר כתרגיל.

דוגמא נחשב את שטח ספירת היחידה בתוך $\mathbb{R}^3$. בחדוא 3 ראינו כי הנפח של כדור ברדיוס r בתוך $\mathbb{R}^3$ הוא

$$\frac{4}{3}\pi r^3$$

אם ניקח כדור ברדיוס $r+\Delta r$, נקבל שההפרש בין הנפחים הוא בערך $S\left(r\right)\Delta r$, כאשר $S\left(r\right)$ זה השטח של ספירה ברדיוס r. לכן נסיק כי

$$S\left(r\right)=\left(V\left(r\right)\right)'$$

כאשר $V\left(r\right)$ זה הנפח של ספירה ברדיוס r. לכן

$$S\left(r\right)=4\pi r^2$$

זה לא כל כך ריגורוזי, ובהמשך נראה דרך לעשות את זה יותר פורמלי ומדוייק.
כעת נחשב במדוייק: היריעה שלנו נתונה על ידי $F\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2-1=0$, ואז

$$\begin{gathered}\left|\nabla F\right|^2=\left(2x\right)^2+\left(2y\right)^2+\left(2z\right)^2=4\\ F_z=2z=2\sqrt{1-x^2-y^2}\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}A\left(S^2\right)&=2\iint\limits_{x^2+y^2<1}\frac{2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}=2\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int\limits_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,\mathrm{d}r=\\ &=\begin{bmatrix}r^2=s\\ 2r\mathrm{d}r=\mathrm{d}s\end{bmatrix}=2\pi\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{1-s}}\,\mathrm{d}s=2\pi\cdot 2=4\pi\end{aligned}$$