

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

19 באפריל 2017

### 1 אינטגרציה על יריעות

דיברנו על נפח  $k$  מימדי של מקבילון שנפרש על ידי  $k$  וקטורים. המקבילון הוא

$$\pi(v_1, \dots, v_k) = \left\{ \sum t_i v_i \mid t_i \in [0, 1] \right\}$$

**הגדרה 1.1** יהיו  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ . הנפח של המקבילון הנפרש על ידם הוא

$$\sqrt{\Gamma(v_1, \dots, v_k)} = \sqrt{\det((v_i, v_j))_{i,j}}$$

### 1.1 מדידות ואינטגרביליות על יריעות

**הגדרה 1.2** תת קבוצה  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  נקראת זניחה או (ממידה 0) אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים כיסוי בן מניה  $X \subseteq \bigcup R_i$  על ידי תיבות  $R_i$  כך שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(R_i) < \varepsilon$$

**הגדרה 1.3** תהי  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה  $k$  מימדית. תת קבוצה  $E \subseteq M$  נקראת זניחה בתוך  $M$  אם לכל מפה  $r: V \rightarrow M$  הקבוצה  $r^{-1}(E)$  זניחה בתוך  $\mathbb{R}^k$ .

**תרגיל** נניח כי  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה  $k$  מימדית, ותהי  $E \subseteq M$  תת קבוצה. נניח שקיימת משפחה של מפות  $\{r_\alpha: V_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha \in I}$  שמקיימות  $M \subseteq \bigcup r_\alpha(V_\alpha)$ , וכן הקבוצה  $r_\alpha^{-1}(E) \subseteq \mathbb{R}^k$  זניחה לכל  $\alpha$ . אזי  $E$  זניחה בתוך  $M$ .

**הגדרה 1.4** תהי  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה  $k$  מימדית.

1. פונקציה  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  נקראת אינטגרבילית רימן על  $M$  אם:

(א) קבוצת נקודות אי הרציפות  $B_f \subseteq M$  היא זניחה בתוך  $M$ .

(ב) חסומה.  $f$

(ג) בעלת תומך קומפקטי בתוך  $M$ .

2. קבוצה  $E \subseteq M$  נקראת מדידה ז'ורדן בתוך  $M$  אם הפונקציה המאפיינת  $\mathbb{1}_E : M \rightarrow \mathbb{R}$  היא אינטגרבילית רימן על  $M$ .

**הגדרה 1.5** תהי  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה  $k$  מימדית.

1. פונקציה  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  נקראת נוחה אם יש לה תומך קומפקטי בתוך  $f$  וקיימת מפה

$$r : V \rightarrow M \text{ המקיימת } r(V) \supseteq \text{supp}(f)$$

2. קבוצה  $A \subseteq M$  נקראת נוחה אם  $\mathbb{1}_A$  נוחה.

**תרגיל** תהי  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה  $k$  מימדית. אזי קיים כיסוי  $M = \bigcup U_\alpha$ , כאשר כל  $U_\alpha$  פתוחה יחסית בתוך  $M$ , נוחה, ומדידה ז'ורדן בתוך  $M$ .

**טענה 1.6** תהי  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  יריעה  $k$  מימדית. אזי כל פונקציה אינטגרבילית רימן אפשר לכתוב כסכום של מספר סופי של פונקציות נוחות אינטגרביליות רימן על  $M$ .

**הוכחה:** נסמן  $K = \text{supp}(f) \subseteq M$  קומפקטית. ניקח כיסוי  $M = \bigcup U_\alpha$  כמו בתרגיל. אזי  $K \subseteq U_\alpha$  כיסוי על ידי קבוצות פתוחות יחסית בתוך  $M$ , ולכן קיים כיסוי סופי

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^m U_{\alpha_i}$$

כעת, נגדיר פונקציות  $\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי

$$\varphi_i(x) = \frac{\mathbb{1}_{U_{\alpha_i}}(x)}{\sum_{j=1}^m \mathbb{1}_{U_{\alpha_j}}(x)}$$

עבור

$$x \in \bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}$$

או  $\varphi(x) = 0$  אם  $x$  לא באיחוד. כעת, אם  $x$  באיחוד ברור כי

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i(x) = 1$$

וכן כי  $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ . כמו כן,  $\varphi_i$  מתאפסת מחוץ לקבוצה  $U_{\alpha_i}$ , ולכן היא נוחה. כעת,

$$f = \sum_{i=1}^m f \varphi_i$$

על  $M$ . כמו כן,  $f \varphi_i$  מתאפסת מחוץ לקבוצה  $U_{\alpha_i}$  ולכן נוחה. ■