חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

3 באפריל 2017

1 מרחב משיק

נמשיך בדיוק על המרחב המשיק, והפעם נדבר על על־משטחים כלומר יריעות ממימד $n-1$ בתוך $\mathbb{R}^n$.

יהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ על משטח, כלומר $\dim M=n-1$. כעת, לכל $x\in M$ מתקיים

$$\dim T_xM=n-1$$

ולכן

$$\dim\left(T_xM\right)^{\perp}=1$$

הגדרה 1.1 יהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ על משטח. נורמל יחידה $N\left(x\right)$ ליריעה M בנקודה x הוא וקטור מתוך $\left(T_xM\right)^{\perp}$ עם $\left|N\left(x\right)\right|=1$. נשים לב שבכל x יש בדיוק שתי בחירות אפשריות של $N\left(x\right)$.

כיצד נמצא נורמל יחידה? אם M נתון בעזרת הצגה סתומה מקומית $M\cap U=\left\{F=0\right\}$, כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, $F:U\to\mathbb{R}$ חלקה ורגולרית בנקודות של $M\cap U$, אז יודעים שמתקיים

$$T_xM=\left(\nabla F\left(x\right)\right)^{\perp}$$

אז אפשר למצוא נורמל יחידה על ידי

$$N=\pm\frac{\nabla F\left(x\right)}{\left|\nabla F\left(x\right)\right|}$$

נניח עכשיו כי M היא באופן מקומי גרף, כלומר יש $U\subseteq\mathbb{R}^n$ כך שמתקיים

$$M\cap U=\left\{\left(x_1,\dots,x_{n-1},f\left(x_1,\dots,x_n\right)\right)\mid\left(x_1,\dots,x_{n-1}\right)\in G\right\}$$

כאשר $G\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ פתוחה. נגדיר

$$F\left(x_1,\ldots,x_n\right)=x_n-f\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)$$

ואז

$$\begin{aligned}\nabla F\left(x\right)&=\left(-f_{x_1},\ldots,-f_{x_{n-1}},1\right)\\\left|\nabla F\left(x\right)\right|&=\sqrt{1+\left|\nabla f\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)\right|^2}\end{aligned}$$

ומכאן נקבל נורמל.
כעת, נניח כי $r:V\to M$ מפה. אנחנו יודעים כי המרחב המשיק נפרש על ידי הנגזרות החלקיות של r, ולכן נחפש להן ווקטור אורתוגונלי.
כיצד נמצא ווקטור שהוא משלים אורתוגונלי של $n-1$ ווקטורים נתונים? על ידי מכפלה מצולבת (Cross Product). נניח כי $R_1,\ldots,R_{n-1}\in\mathbb{R}^{n-1}$ ווקטורים. נגדיר

$$\varphi\left(R\right)=\det\left(R,R_1,\ldots,R_{n-1}\right)$$

כאשר $R\in\mathbb{R}^n$. כעת זהו פונקציונל לינארי, ולכן קיים ויחיד ווקטור y כך שמתקיים

$$\varphi\left(R\right)=\left(y,R\right)$$

ברור כי כל R_i בגרעין של φ, כי זה ייתן דטרמיננטה של מטריצה שבה יש שורה שמופיעה פעמיים, ולכן y מאונך לכל R_i.
y נקרא המכפלה המצולבת של $R_1,\ldots,R_{n-1}$ ומסמנים

$$y=R_1\times R_2\times\cdots\times R_{n-1}$$

פורמלית אפשר לחשבו על ידי

$$R_1\times\cdots\times R_{n-1}=\det\begin{pmatrix}e_1&e_2&\ldots&e_n\\R_{11}&R_{12}&\ldots&R_{1n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\R_{(n-1)1}&R_{(n-1)2}&\ldots&R_{(n-1)n}\end{pmatrix}$$

כאשר e_i הם ווקטורי הבסיס הסטנדרטי.

הגדרה 1.2 יהיו $v_1,\ldots,v_k\in\mathbb{R}^n$ ווקטורים. נגדיר את דטרמיננטת גראם שלהם על ידי

$$\Gamma\left(v_1,\ldots,v_k\right)=\det\left(\left(v_i,v_j\right)\right)_{i,j=1}^k$$

תרגיל יהיו $R_1,\ldots,R_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ ווקטורים. אזי הם בלתי תלויים לינארית אם ורק אם $R_1\times\cdots\times R_{n-1}\neq 0$, אם ורק אם $\Gamma\left(R_1,\ldots,R_k\right)\neq 0$.

טענה 1.3 יהיו $R_1,\ldots,R_{n-1}\in\mathbb{R}^n$. נסמן $y=R_1\times\cdots\times R_{n-1}$. אזי

$$|y|=\sqrt{\Gamma\left(R_1,\ldots,R_{n-1}\right)}$$

הוכחה: מהתרגיל, $\Gamma\left(R_1,\ldots,R_{n-1}\right)\iff y=0$. לכן נניח כי $y\neq 0$, ונתבונן בנרמול

$$n=\frac{y}{|y|}$$

אזי

$$(y,n)=\left(y,\frac{y}{|y|}\right)=|y|$$

כעת,

$$|y|^2=(y,n)^2=\det\left(n,R_1,\ldots,R_{n-1}\right)^2=\det\left(\left(n,R_1,\ldots R_{n-1}\right)\cdot\left(n,R_1,\ldots,R_{n-1}\right)^t\right)=$$

$$=\det\begin{pmatrix}(n,n) & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & (R_1,R_1) & (R_1,R_2) & \ldots & (R_1,R_{n-1})\\ 0 & (R_2,R_1) & (R_2,R_2) & \ldots & (R_2,R_{n-1})\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & (R_{n-1},R_1) & (R_{n-1},R_2) & \ldots & (R_{n-1},R_{n-1})\end{pmatrix}=\Gamma\left(R_1,\ldots,R_{n-1}\right)$$

■

מסקנה 1.4 אם $r:V\to M$ מפה על על־משטח, ונסמן $x=r\left(q\right)$, אזי נורמלי היחידה הם

$$N\left(x\right)=\pm\frac{r_{q_1}\times\cdots\times r_{q_{n-1}}}{\sqrt{\Gamma\left(r_{q_1},\ldots,r_{q_{n-1}}\right)}}$$

נשווה בין החישובים:

יהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ על־משטח. תהי $x\in M$ נקודה. קיימת סביבה U כך שמתקיים

$$M\cap U=\left\{\left(\xi,f\left(\xi\right)\right)\mid\xi\in G\right\}$$

כאשר $G\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ תחום, $f:G\to\mathbb{R}$,

$$\xi=\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)$$

נגדיר הצגה סתומה

$$\begin{aligned} F(x_1,\dots,x_n) &= x_n - f(x_1,\dots,x_{n-1}) \\ \nabla F(x) &= \left(-f_{x_1},\dots,-f_{x_{n-1}},1\right) \\ |\nabla F(x)| &= \sqrt{|\nabla F(\xi)|^2+1} \end{aligned}$$

כמו כן נגדיר גם פרמטריזציה

$$r(\xi) = r(x_1,\dots,x_{n-1}) = (x_1,\dots,x_{n-1},f(x_1,\dots,x_{n-1}))$$

כעת הנגזרות החלקיות הן

$$r_{x_i} = e_i + i f_{x_i}$$

עבור $1 \le i \le n-1$, $e_i \in \mathbb{R}^n$ הבסיס הסטנדרטי. כעת, הווקטורים $\nabla F(x)$, $r_{x_1}(\xi) \times \cdots \times r_{x_{n-1}}(\xi)$ שניהם אורתוגונליים למרחב T_xM ולכן

$$r_{x_1}(\xi) \times \cdots \times r_{x_{n-1}}(\xi) = c\left(-f_{x_1},\dots,-f_{x_{n-1}},1\right)$$

מהשוואה של הקואורדינטה האחרונה, נקבל

$$(-1)^{n-1} = c$$

מסקנה 1.5 קיבלנו כי

$$\Gamma\left(r_{x_1}(\xi),\dots,r_{x_{n-1}}(\xi)\right) = 1 + |\nabla f(\xi)|^2$$

2 אינטגרציה על יריעות

הגדרה 2.1 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה, ותהי $f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. התומך של f הוא

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}}$$

הגדרה 2.2 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$. נאמר כי f בעלת תומך קומפקטי בתוך A אם $\operatorname{supp}(f) \subseteq A$ קומפקטית.

הגדרה 2.3 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה, $f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר כי f אינטגרבילית רימן (במובן של אינטגרל אמיתי) אם עבור $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המקיימת

$$\tilde{f}\left(x\right) = \begin{cases} f\left(x\right) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

מתקיים כי $\tilde{f}$ מתאפסת מחוץ לתיבה סופית Q כלשהי, וכן $\tilde{f}$ אינטגרבילית על Q. במקרה זה נסמן

$$\int\limits_A f\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \int\limits_Q \tilde{f}\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

משפט 2.4 (החלפת משתנים) תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, $T : U \to T\left(U\right)$ דיפאומורפיזם ($T\left(U\right) \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה). נתונה הפונקציה $f : T\left(U\right) \to \mathbb{R}$ עם תומך קומפקטי בתוך $T\left(U\right)$ ואינטגרבילית רימן. אזי

$$\int\limits_{T(U)} f = \int\limits_U \left(f \circ T\right)\left|J_T\right|$$

2.1 נפח k מימדי

בחדו"א 3 ראינו נפח של מקבילון הנוצר על ידי n ווקטורים $v_1, \ldots, v_n$ על ידי

$$\left|\det\left(v_1, \ldots, v_n\right)\right|$$

נרצה לדון בנפח של מקבילון בתוך $\mathbb{R}^n$ שנוצר על ידי הוקטורים $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

תכונות

1. נסתכל על

$$\mathbb{R}^k \times \left\{0_{n-k}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

אם $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^k \times \left\{0_{n-k}\right\}$, כלומר $v_i = \left(w_i, 0_{n-k}\right)$, אזי הנפל של המקבילון שנפרש על ידי v_i הוא

$$\left|\det\left(w_1, \ldots, w_k\right)\right|$$

2. אם $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ ונתונה $P \in O\left(n\right)$ טרנספורמציה אורתוגונלית של $\mathbb{R}^n$ אזי הנפח של המקבילון שנוצר על ידי $Pv_1, \ldots, Pv_k$ שווה לנפח של המקבילון הנוצר על ידי $v_1, \ldots, v_k$.

שתי התכונות הללו מגדירות באופן יחיד נפח k מימדי - ניקח מקבילון, נסובב אותו כך שהוא בתוך $\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$, ונקבל את נפחו.

נניח $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$. נבחר העתקה אורתוגונלית $P \in O(n)$ כך שהווקטורים $Pv_i = (w_i, 0_{n-k}) \in \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$. נחשב:

$$\begin{aligned}|\det(w_1, \ldots, w_k)| &= \sqrt{\det\left((w_1, \ldots, w_k)(w_1, \ldots, w_k)^T\right)} = \sqrt{\det\left(((w_i, w_j))_{i.j=1}^k\right)} = \\ &= \sqrt{\det\left(((Pv_i, Pv_j))_{i,j=1}^k\right)} = \sqrt{\det\left(((v_i, v_j))_{i,j=1}^\infty\right)} = \\ &= \sqrt{\Gamma(v_1, \ldots, v_k)}\end{aligned}$$

לכן לא צריך את העתקה העזר P, ופשוט נגדיר ככה נפח k מימדי.