חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

22 במרץ 2017

נמשיך עם מה שעשינו בשיעור שעבר.

טענה 0.1 תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ בעלת פרמטריזציה k מימדית טובה $r : V \to \mathbb{R}^n$, $r(V) = M$, כאשר $V \subseteq \mathbb{R}^k$. אזי לכל $a \in V$ קיימת סביבה W של $(a, 0_{n-k})$ בתוך $\mathbb{R}^n$ ודיפאומורפיזם

$$\psi : W \to \psi(W)$$

כאשר $\psi(W) \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, כך שמתקיים

$$\psi\left(W \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}\right)\right) = \psi(W) \cap U$$

וכך שאם נגדיר סביבה $\tilde{V}$ של $a \in \mathbb{R}^k$ על ידי

$$\tilde{V} \times \{0_{n-k}\} = W \cap \left(\mathbb{R}^k \cap \{0_{n-k}\}\right)$$

אזי $\tilde{V} \subseteq V$ וכן

$$\psi(q, 0_{n-k}) = r(q)$$

לכל $q \in \tilde{V}$.

הוכחה: יהי $a \in V$. נסמן $x_0 = r(a) \in M = r(V)$. נכתוב

$$r(q) = (r_1(q), \ldots, r_n(q))$$

r רגולרית, ולכן קיים לדיפרנציאל שלה מינור הפיך. בלי הגבלת הכלליות, נניח כי זהו המינור השמאלי העליון.

נגדיר העתקה ψ על ידי

$$\psi\left(\underbrace{x_1, \ldots, x_k}_{x'}, \underbrace{x_{k+1}, \ldots, x_n}_{x''}\right) = \psi(x', x'') = r(x') + (0_k, x'')$$

כעת,

$$D_{(a,0_{n-k})}\psi = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)_{i,j=1}^{k} & 0 \\ * & I_{k-n} \end{pmatrix}$$

בפרט זוהי מטריצה הפיכה. לכן קיימת סביבה W' של $(a,0_{n-k})$ בתוך $\mathbb{R}^n$ כך שאם נצמצם את ψ על W' נקבל

$$\psi\mid_{W'}: W' \to \psi\left(W'\right)$$

דיפאומורפיזם (ממשפט הפונקציה ההפוכה).
כעת נגדיר V' על ידי $V' \times \{0_{n-k}\} = W' \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}\right)$, וכן $\psi\left(W'\right) = U'$.
כעת, $r: V \to r\left(V\right)$ הומיאומורפיזם, כלומר r^{-1} רציפה, וכן U' פתוחה, ולכן קיים $\varepsilon > 0$ עבורו

$$\forall q \in V \backslash V' \;\; d\left(r\left(q\right), r\left(a\right)\right) > \varepsilon$$
$$B\left(r\left(a\right), \varepsilon\right) \subseteq U'$$

נגדיר כעת $\tilde{U} = B\left(r\left(a\right), \varepsilon\right)$, $\tilde{W} = \psi^{-1}\left(\tilde{U}\right)$, וכעת

$$\tilde{U} \cap M = \tilde{U} \cap r\left(V'\right)$$

נראה את התנאי שחסר לנו. מתקיים

$$\psi\left(\tilde{W} \cap \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}\right) \subseteq \psi\left(\tilde{W}\right) \cap M = \tilde{U} \cap M = \tilde{U} \cap r\left(V'\right) = \psi\left(\tilde{W}\right) \cap \psi\left(V' \times \{0_{n-k}\}\right) =$$
$$= \psi\left(\tilde{W} \cap \left(V' \times \{0_{n-k}\}\right)\right) \subseteq \psi\left(\tilde{W} \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}\right)\right)$$

ולכן לכל אורך הדרל יש שוויון ובפרט

$$\psi\left(\tilde{W} \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}\right)\right) = \psi\left(\tilde{W}\right) \cap M$$

■

טענה זו בעצם מראה שבמשפט מהשיעור שעבר, שלא סיימנו, מתקיים $3 \Rightarrow 2$ (וזה מוכיח את כל השקילות, אם נבחן בזהירות את המעברים). נניח שעבור M יש פרמטריזציה k מימדית טובה באופן מקומי, כלומר לכל נקודה x יש סביבה בעלת פרמטריזציה k מימדית טובה. הראינו שאפשר להרחיב את הפרמטריזציה לדיפאומורפיזם מסביבה של המקור של x אל סביבה אחרת של x. הבעיה היחידה היא שהסביבה החדשה של x עשויה לצאת מהסביבה הישנה. נסמן את הסביבה בעלת הפרמטריזציה U', ואת המקור שלה V''. הדיפאומורפיזם שמצאנו הוא

$$\psi: W'' \to \psi\left(W''\right) = U''$$

נגדיר $U = U' \cap U''$, ונסמן

$$\varphi = \psi^{-1}\mid_U : U \to \psi^{-1}(U)$$

ואז מתקיים

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U'' \cap (M \cap U')) = \varphi(U'') \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}\right) = \varphi(U) \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}\right)$$

בזה סיימנו את הוכחת המשפט מהשיעור שעבר.