חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

20 במרץ 2017

ראינו 3 דרכים להציג יריעות:

1. גרף של העתקה חלקה.
2. הצגה פרמטרית.
3. הצגה סתומה.

כעת נראה דוגמה ליריעה שלא קיימת לה הצגה פרמטרית או הצגה סתומה - תחת ההגבלות שמצאנו שיש לדרוש - ולכן בפרט היא לא גרף של פונקציה חלקה. הדוגמה היא של טבעת מוביוס שנסמנה M. כדי להוכיח שאין לה הצגות כאלה נצטרך מעט כלים שנלמד בהמשך, ולכן בינתיים ההסבר לא יהיה פורמלי.

1. הצגה פרמטרית: נניח שיש הצגה פרמטרית, כלומר $r: W \to M$ כאשר $W \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה. אפשר להגדיר בכל $M \ni x = r(q)$, כאשר $q \in W$, את הווקטור

$$N(x) = \frac{r_{q_1}(q) \times r_{q_2}(q)}{|r_{q_1}(q) \times r_{q_2}(q)|}$$

הכוונה בסימון r_{q_i} היא לנגזרת חלקית בכיוון x_i.

2. הצגה סתומה: נניח כי $M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$, כאשר $U \subseteq M$, $f: U \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה, f רגולרית על M. הפעם נגדיר

$$N(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$$

בשני המקרים הצלחנו להגדיר משפחה יחידה של ווקטורי יחידה שמאונכים למשטח. זו בעיה מסיבות שנראה בהמשך.

כעת סוף סוף נגדיר יריעה.

הגדרה 0.1 תת קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ תיקרא יריעה k מימדית אם לכל $x_0 \in M$ קיימת סביבה U של x_0 בתוך $\mathbb{R}^n$ כך שהחיתוך $M \cap U$ הוא גרף: קיימם אינדקסים $i_1, \ldots, i_k$ ואינדקסים $j_1, \ldots, j_{n-k}$ כך שמתקיים

$$\{i_1, \ldots i_k\} \cup \{j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

וכן קיימת קבוצה פתוחה $V \subseteq \mathbb{R}^k$ והעתקה חלקה $f : V \to \mathbb{R}^{n-k}$ כך שמתקיים

$$M \cap U = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\right) = \left(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}}\right) \right\}$$

הגדרה 0.2 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה k מימדית אם לכל $x_0 \in M$ קיימת סביבה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ודיפאומורפיזם $\varphi : U \to \varphi(U)$ כאשר $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, כך שמתקיים

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}\right)$$

אינטואיטיבית, φ מיישרת את היריעה בסביבה של x_0.

הגדרה 0.3 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא בעלת פרמטריזציה (k מימדית) טובה אם קיימת העתקה חלקה ורגולרית $r : V \to \mathbb{R}^n$, כאשר $V \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה פתוחה, כך שמתקיים $M = r(V)$, וכן $r : V \to M$ היא הומיאומורפיזם.

הגדרה 0.4 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא בעלת הצגה סתומה (k מימדית) טובה אם קיימת קבוצה פתוחה $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ והעתקה חלקה ורגולרית $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ כך שמתקיים

$$M = F^{-1}\left(0_{n-k}\right)$$

הגדרה 0.5 נאמר כי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא בעלת פרמטריזציה k מימדית טובה <u>באופן מקומי</u> אם לכל $x \in M$ קיימת סביבה U כך שהקבוצה $M \cap U$ היא בעלת פרמטריזציה k מימדית טובה.

הגדרה 0.6 נאמר כי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ היא בעלת הצגה סתומה k מימדית טובה <u>באופן מקומי</u> אם לכל $x \in M$ קיימת סביבה U כך שהקבוצה $M \cap U$ היא בעלת הצגה סתומה k מימדית טובה.

משפט 0.7 תהא $M \subseteq \mathbb{R}^n$. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. M יריעה לפי ההגדרה הראשונה.
2. M יריעה לפי ההגדרה השנייה.
3. M בעלת פרמטריזציה טובה באופן מקומי.
4. M בעלת הצגה סתומה טובה באופן מקומי.

הוכחה: את ההוכחות $1 \Rightarrow 3, 4$ נשאיר כתרגיל (כבר דיברנו על הרבה ממה שצריך).
כעת נדבר על $2 \Rightarrow 3, 4$. יש לנו $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ולכל $x_0 \in M$ יש סביבה $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ עם דיפאומורפיזם $\varphi : U \to \varphi(U)$ המקיים

$$\varphi(U \cap M) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$$

נוכל לכתוב $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, ואז מתקיים

$$M \cap U = \{x \in U \mid \forall 1 \leq i \leq n-k \;\; \varphi_{k+i}(x) = 0\}$$

כמו כן, $\nabla\varphi_{k+i}$ בלתי תלויים שכן נתון כי φ דיפאומורפיזם - אם הם לא היו בלתי תלויים הדיפרנציאל לא היה הפיך. לכן מצאנו הצגה סתומה.
כעת נגדיר $\psi = \varphi^{-1}$. נגדיר את $V \subseteq \mathbb{R}^k$ על ידי

$$V \times 0_{n-k} = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k \times \{0_{n-k}\}$$

נגדיר העתקה $r : V \to \mathbb{R}^n$ על ידי $r(q) = \psi(q, 0_{n-k})$. ψ היא דיפאומורפיזם, ולכן כל הנגזרות החלקיות של r הן בלתי תלויות, ולכן r רגולרית. כעת,

$$\psi : \varphi(U) \to U$$

הומיאומורפיזם ולכן

$$\psi \mid_{V \times \{0_{n-k}\}} : V \times \{0_{n-k}\} \to \psi(V \times \{0_{n-k}\}) = M \cap U$$

הומיאומורפיזם גם כן. מכאן כי

$$r : V \to r(V)$$

גם כן הומיאומורפיזם. לכן מצאנו פרמטריזציה.
כעת נעבור להראות כי $1, 2 \Rightarrow 4$. נניח כי $x_0 \in M$. אזי קיימת סביבה U של x_0 ופונקציה חלקה $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ כך שמתקיים $M \cap U = F^{-1}(0_{n-k})$.
יודעים שההעתקה F רגולרית על $M \cap U$, ולכן $\mathrm{rk} DF(x_0) = n-k$. לכן קיימים אינקסים $l_1 < \cdots < l_{n-k}$ כל שהנגזרות החלקיות $\frac{\partial F_i}{\partial x_{l_j}}$ בלתי תלויות - כלומר המינור שהן יוצרות הפיך. בלי הגבלת הכלליות $l_i = k+i$. ממשפט הפונקציה הסתומה, קיימת סביבה $\tilde{U} = V \times W \subseteq U$ כך שמתקיים

$$\{F = 0\} \cap \tilde{U} = \{(x, g(x)) \mid x \in V\}$$

כאשר $V \subseteq \mathbb{R}^k$, $W \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ פתוחות, וכן

$$g : V \to W$$

העתקה חלקה. זה מראה בדיוק שמתקיים תנאי 1.
כעת נגדיר את ההעתקה φ שתראה את תנאי 2. נגדיר

$$\varphi : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$$
$$\varphi(x, y) = (x, y - g(x))$$

קל לכתוב את ההעתקה ההפוכה, ולראות ששתיהן חלקות. לכן נקבל את התנאי השני.
■