חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ארזים ©

28 ביוני 2017

1 תבניות

אנחנו נמשיך להתמקד בתחומים $U \subseteq \mathbb{R}^2$. דיברנו על $\Lambda^1\left(\mathbb{R}^2\right) = \left(\mathbb{R}^2\right)^*$, $\Lambda^2\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathrm{span}\left\{\det\right\}$, ודיברנו על פעולת wedge:

$$\wedge : \Lambda^1\left(\mathbb{R}^2\right) \times \Lambda^1\left(\mathbb{R}^2\right) \to \Lambda^2\left(\mathbb{R}^2\right)$$

אפשר, בהינתן U תחום, להרחיב את זה אל

$$\wedge : \Omega^1\left(U\right) \times \Omega^1\left(U\right) \to \Omega^2\left(U\right)$$

כאשר לכל $q \in U$, $\alpha_q, \beta_q : T_qU \to \mathbb{R}$ ואז

$$\left(\alpha \wedge \beta\right)_q = \alpha_q \wedge \beta_q \in \Lambda^2\left(T_qU\right)$$

בקואורדינטות, נכתוב

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 \mathrm{d}q_1 + a_2 \mathrm{d}q_2 \\ \beta &= b_1 \mathrm{d}q_1 + b_2 \mathrm{d}q_2 \end{aligned}$$

ואז

$$\alpha \wedge \beta = \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right) \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2$$

כאשר ראינו שעבור e_1, e_2 הבסיס הסטנדרטי של $T_qU \cong \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2\left(e_1, e_2\right) &= 1 \\ \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2\left(e_2, e_1\right) &= -1 \\ \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2\left(e_i, e_i\right) &= 0 \end{aligned}$$

כעת, כל $\omega \in \Omega^2\left(U\right)$ נוכל לכתוב בתור $\omega = f\left(q_1, q_2\right) \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2$.

1.1 אינטגרציה

אם $U \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום מישורי, ואם $\omega \in \Omega^2\left(U\right)$, נרצה לבצע אינטגרציה על U של ω. נעשה זאת בדומה למה שעשינו עבור יריעות דו מימדיות בתוך $\mathbb{R}^3$ - ניקח δ־רשת ונסכום על הקודקודים שלה בתוך U:

$$\sum_{q \in U} \omega_q\left(\delta e_1, \delta e_2\right) = \sum_{q \in U} \delta^2 \omega_q\left(e_1, e_2\right) \to \int_U \omega_q\left(e_1, e_2\right)\, \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2$$

משפט 1.1 (גרין) יהי $G \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום חלק. יהיו $f, g : \overline{G} \to \mathbb{R}$ חלקות. אזי

$$\int\limits_{\partial G} f \mathrm{d}u + g \mathrm{d}v = \int\limits_{G} (g_u - f_v)\ \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

הערה 1.2 נגדיר

$$d\alpha = \mathrm{d}\left(f \mathrm{d}u + g \mathrm{d}v\right) = \left(g_u - f_v\right) \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$$

ואז המשפט נראה כמו

$$\int\limits_{\partial G} \alpha = \int\limits_{G} \mathrm{d}\alpha$$

וזה משפט סטוקס, שמכליל את כל העסק (לתחומים כלליים במימדים כליים, ותבניות כלליות ממימדים כלליים). זה משתמש באופרטור האמיתי

$$\mathrm{d} : \Omega^1\left(U\right) \to \Omega^2\left(U\right)$$

נסמן גם

$$\Omega^0\left(U\right) = C^\infty\left(U\right)$$

ואז כבר יש לנו

$$\begin{aligned} \mathrm{d} : \Omega^0\left(U\right) &\to \Omega^1\left(U\right) \\ f` &\mapsto \mathrm{d}f \end{aligned}$$

כלומר f עובר לדיפרנציאל שלו.
קיבלנו שרשרת העתקות

$$\Omega^0\left(U\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1\left(U\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} G^2\left(U\right)$$

תרגיל

.1

$$\begin{aligned} \alpha, \beta &\in \Omega^1\left(U\right) \\ \mathrm{d}\left(\alpha + \beta\right) &= \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta \end{aligned}$$

.2

$$f \in \Omega^0(U)$$
$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = 0$$

.3

$$f \in \Omega^0(U), \alpha \in \Omega^1(U)$$
$$\mathrm{d}(\alpha f) = \mathrm{d}f \wedge \alpha + f \cdot \mathrm{d}\alpha$$

למעשה, שלוש התכונות הללו, אם מסכימים שהאופרטור d פועל על פונקציות בתור דיפרנציאל, מגדירות את d באופן יחיד על $\Omega^1(U)$.

תרגיל יהיו $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצות פתוחות. תהי $\varphi : U \to V$ העתקה חלקה.

1. לכל $\alpha \in \Omega^1(V)$, ניזכר שהגדרנו את $\varphi^*\alpha \in \Omega^1(U)$, ומתקיים

$$\varphi^*(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}(\varphi^*\alpha)$$

2. לכל $\alpha, \beta \in \Omega^1(V)$, מתקיים

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$$

3. לכל $\alpha \in \Omega^1(V)$ ולכל עקומה $\gamma : [a,b] \to U$ מתקיים

$$\int_\gamma \varphi^*\alpha = \int_{\varphi\circ\gamma} \alpha$$

4. אם $\varphi : U \to V$ דיפאומורפיזם ונתונה $\omega \in \Omega^2(V)$ אזי

$$\int_U \varphi^*\omega = \int_V \omega$$

ננסח כעת את משפט גרין בשפה זו (שהיא טבעית, מהתכונות שראינו), ונוכיח אותו בעזרתה.

משפט 1.3 (גרין) אם G תחום חלק, $\omega \in \Omega^1(G)$ אזי

$$\int_{\partial G} \omega = \int_G \mathrm{d}\omega$$

הוכחה: אנחנו הולכים לכסות את G עם ריבועים עקומים. עבור $Q=[0,1]^2$ בדקנו -

$$\int\limits_{\partial Q}\alpha=\int\limits_0^1 f(u,0)\,\mathrm{d}u+\int\limits_0^1 g(1,v)\,\mathrm{d}v-\int\limits_0^1 f(u,1)\,\mathrm{d}u-\int\limits_0^1 g(0,v)\,\mathrm{d}v=$$

$$=-\int\limits_0^1 f(u,1)-f(u,0)\,\mathrm{d}u+\int\limits_0^1 g(1,v)-g(0,v)\,\mathrm{d}v=$$

$$=-\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{\partial g}{\partial u}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int\limits_Q\left(\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

נשתמש בחישוב זה כדי להוכיח לכל תחום. ניקח כיסוי של $\overline{G}$ על ידי תמונות דיפאומורפיות של $\overline{Q}$ - כלומר

$$\varphi_i:\overline{Q}\to\overline{G}$$

דיפאומורפיזם לתמונה, עם $\varphi_i(Q)\subseteq G$, ואז

$$\bigcup_{i=1}^n\varphi_i(Q)=G$$

נזכור כי $\alpha=f\mathrm{d}u+g\mathrm{d}v$. אפשר לרשום $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_N$ כאשר $\alpha_i=0$ במשלים של $\varphi_i\left(\overline{Q}\right)$. לכן, מספיק להראות את המשפט על α_i:

$$\int\limits_{\partial G}\alpha_i=\int\limits_G\mathrm{d}\alpha_i$$

ולסיים. עבור אחד שכזה, הכל קורה בתוך $\varphi_i\left(\overline{Q}\right)$, ולכן

$$\int\limits_{\partial(\varphi_i(Q))}\alpha_i=\int\limits_{\varphi_i(\partial Q)}\alpha_i=\int\limits_{\partial Q}\varphi_i^*\alpha_i$$

$$\int\limits_{\varphi_i(Q)}\mathrm{d}\alpha_i=\int\limits_Q\varphi_i^*\mathrm{d}\alpha_i=\int\limits_Q\mathrm{d}\left(\varphi_i^*\alpha_i\right)$$

אנחנו יודעים שאגפים ימין שווים, מהמקרה של הריבוע, ולכן נסיים. ■