חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

27 ביוני 2017

1 תבניות דיפרנציאליות

1.1 תבניות מסדר 2

נעשה חזרה קצרה על מה שעשינו. כשהייתה לנו עקומה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, ω תבנית דיפרנציאלית, כלומר $\omega_x : T_x\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, לקחנו נקודות $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ ואז רצינו שהאינטגרל

$$\int\limits_{\gamma} \omega$$

יהיה בערך

$$\sum \omega_{\gamma(t_i)} \left(\gamma\left(t_{i+1}\right) - \gamma\left(t_i\right)\right)$$

כדי להשיג את זה, לכל עדינות, ניקח אינטגרל:

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{a}^{b} \omega_{\gamma(t)} \left(\gamma'\left(t\right)\right) \mathrm{d}t$$

נרצה להכליל את זה לעל משטחים (ויריעות n־מימדיות כלליות). כעת, יהי $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ משטח דו מימדי, יריעה עם מפה $r : G \to \Sigma$ עם $r\left(G\right) = \Sigma$, כאשר $G \subseteq \mathbb{R}^2$. ניקח רשת של ריבועים בעלי אורך צלע δ במישור $\mathbb{R}^2$. ניקח $q \in G$ קודקוד של הרשת. נכתוב

$$\Delta_1 r\left(q\right) = r\left(q + \delta e_1\right) - r\left(q\right)$$
$$\Delta_2 r\left(q\right) = r\left(q + \delta e_2\right) - r\left(q\right)$$

נניח כעת כי ω הוא אוסף פונקציונאלים

$$\omega_x : T_x\mathbb{R}^3 \times T_x\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

שכולם בי לינאריים בכל $x \in \mathbb{R}^3$. אזי

$$\begin{aligned}\sum_{q\in G} \omega_{r(q)} \left(\Delta_1 r\left(q\right), \Delta_2\left(r, q\right)\right) &\approx \sum_{q\in G} \omega_{r(q)} \left(\delta r_{q_1}\left(q\right), \delta r_{q_2}\left(q\right)\right) = \\ &= \sum \delta^2 \omega_{r(q)} \left(r_{q_1}\left(q\right), r_{q_2}\left(q\right)\right)\end{aligned}$$

ניקח $\delta \to 0$ ונקבל שאיפה אל

$$\int\limits_G \omega_{r(q)}\left(r_{q_1}(q), r_{q_2}(q)\right) \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2$$

הערה 1.1 (תרגיל) האינטגרל אינו תלוי בפרמרטיזציה (שיש לה את אותו אוריינטציה) אם ורק אם ω אנטיסימטרית בכל נקודה.

הוכחה: (בהוכחה זו הסימון $D_x f$ אומר נגזרת של f בנקודה x) נניח כי ω אנטיסימטרית. ניקח $r_1 : G_1 \to \Sigma, r_2 : G_2 \to \Sigma$. נגדיר

$$\varphi = r_1^{-1} r_2 : G_2 \to G_1$$

ואז כמובן

$$r_2 = r_1 \varphi$$

לכן

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_{G_2} \omega_{r_2(q)}\left(r_{2_{q_1}}(q), r_{2_{q_2}}(q)\right) = \\ &= \int\limits_{G_2} \omega_{r_1\varphi(q)}\left(D_{\varphi(q)} r_1 \left(\varphi_{q_1}\right), D_{\varphi(q)} r_1 \left(\varphi_{q_2}\right)\right) \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בחישוב הבא:

$$\begin{aligned} r_{2_{q_1}}(q) &= D_q r_2 \left(e_1\right) = D_q \left(r_1 \circ \varphi\right)\left(e_1\right) = \left(D_{\varphi(q)} r_1\right) \circ \left(D_q \varphi\right)\left(e_1\right) = \\ &= \left(D_{\varphi(q)} r_1\right)\left(\varphi_{q_1}\right) \\ r_{2_{q_2}}(q) &= D_q r_2 \left(e_1\right) = D_q \left(r_1 \circ \varphi\right)\left(e_2\right) = \left(D_{\varphi(q)} r_1\right) \circ \left(D_q \varphi\right)\left(e_2\right) = \\ &= \left(D_{\varphi(q)} r_1\right)\left(\varphi_{q_2}\right) \end{aligned}$$

נכתוב $\varphi = \left(\varphi_1, \varphi_2\right)$, ואז

$$\begin{aligned} \varphi_{q_1} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} e_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} e_2 \\ \varphi_{q_2} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} e_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} e_2 \end{aligned}$$

נסמן

$$D_q \varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ומכאן

$$D_q\varphi\left(e_1\right)=\varphi_{q_1}=ae_1+be_2$$
$$D_q\varphi\left(e_2\right)=\varphi_{q_2}=ce_1+de_2$$

וכן

$$D_{\varphi(q)}r_1\left(e_1\right)=v_1=r_{1_{q_1}}\left(\varphi\left(q\right)\right)$$
$$D_{\varphi(q)}r_1\left(e_2\right)=v_2=r_{1_{q_2}}\left(\varphi\left(q\right)\right)$$

לכן בסך הכל

$$\left(D_{\varphi(q)}r_1\right)\left(D_q\varphi\right)\left(e_1\right)=D_{\varphi(q)}r_1\left(\varphi_{q_1}\right)=av_1+bv_2$$
$$\left(D_{\varphi(q)}r_1\right)\left(D_q\varphi\right)\left(e_e\right)=D_{\varphi(q)}r_1\left(\varphi_{q_2}\right)=cv_1+dv_2$$

אם כן,

$$\begin{aligned}\omega_{r_1\varphi(q)}\left(av_1+bv_2,cv_1+dv_2\right)=ac\omega_{r_1\varphi(q)}\left(v_1,v_1\right)+ad\omega_{r_1\varphi(q)}\left(v_1,v_2\right)+\\+bc\omega_{r_1\varphi(q)}\left(v_2,v_1\right)+bd\omega_{r_1\varphi(q)}\left(v_2,v_2\right)\end{aligned}$$

מאנטי סימטריה השוויון ממשיך ונהיה:

$$\left(ad-bc\right)\omega_{r_1\varphi(q)}\left(v_1,v_2\right)=\det\left(D_\varphi\left(q\right)\right)\omega_{r_1\varphi(q)}\left(v_1,v_2\right)$$

לכן, נמשיך את השוויון של האינטגרל:

$$\begin{aligned}I_2&=\int\limits_{G_2}\omega_{r_1\varphi(q)}\left(D_{\varphi(q)}r_1\left(\varphi_{q_1}\right),D_{\varphi(q)}r_1\left(\varphi_{q_2}\right)\right)=\\&=\int\limits_{G_2}\det\left(D_\varphi\left(q\right)\right)\omega_{r_1\varphi(q)}\left(v_1,v_2\right)=\left[\tilde{q}=\varphi\left(q\right)\in G_1\right]=\\&=\int\limits_{G_1}\omega_{r_1(\tilde{q})}\left(r_{1_{q_1}}\left(\tilde{q}\right),r_{1_{q_2}}\left(\tilde{q}\right)\right)=I_1\end{aligned}$$

נשים לב שהדיפרנציאל שווה לעצמו בערך מוחלט שכן הנחנו שהמפות באותה אוריינטציה (זו בדיוק ההגדרה). אחרת, היה צריך להרכיב עם שיקוף שמחליף בין הצירים.

קיבלנו שזה אכן מוגדר היטב. בכיוון השני, נשאיר כתרגיל, אבל ניתן רמז - נוכל לשנות לינארית את הבסיס (לכתוב $\varphi\left(q_1,q_2\right)=\left(q_1+q_2,q_2\right)$) ולנסות להמשיך משם (תרגיל קשה). ■

דיברנו על $\omega_x : T_x\mathbb{R}^3 \times T_x\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ בי לינארית ואנטי סימטרית, כאשר $x \in U$, U פתוחה. כעת, ניקח משטח $\Sigma^2 \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^3$, ואז נרצה לצמצם:

$$\tilde{\omega}_x = \omega \mid_{T_x\Sigma \times T_x\Sigma} : T_x\Sigma \times T_x\Sigma \to \mathbb{R}$$

כעת אם יש פרמטריזציה $r : G \to \Sigma$, אז

$$\int_\Sigma \omega = \iint_G \omega_{r(q)} \left(r_{q_1}(q), r_{q_2}(q)\right) \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2$$

1.2 תבניות מסדר גבוה

יהי V מרחב ווקטורי ממשי. נרצה להסתכל על תבנית לינארית אנטיסימטרית

$$\alpha : V^k \to \mathbb{R}$$

אנטיסימטרית במובן הבא:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = -\alpha(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k)$$

נסמן את אוסף כל התבניות מסדר k הלינאריות ואנטיסמטריות על V בתור $\Lambda^k(V)$.

הגדרה 1.2 תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה m־מימדית חלקה, $1 \leq m \leq n$. k־תבנית דיפרנציאלית על M היא משפחה חלקה של k־תבניות לינאריות ואנטיסימטריות על T_xM:

$$\omega_x : (T_xM)^k \to \mathbb{R}$$

כלומר $\omega_x \in \Lambda^k(T_xM)$, ונכתוב $\omega \in \Omega^k(M)$.

דוגמאות

1. אם $m = n$, M קבוצה פתוחה בתוך $\mathbb{R}^n$.
2. אם $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעות ממימדים m_1, m_2, ואם ω היא k־תבנית דיפרנציאלית על M_2, אפשר לצמצם אותה אל M_1:

$$\tilde{\omega} = \omega \mid_{M_1}$$
$$\tilde{\omega}_x : (T_xM_1)^k \to \mathbb{R}$$

3. אפשר גם למשוך לאחור - ניקח $M_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $M_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, ונניח שיש העתקה חלקה $f : M_1 \to M_2$. נניח כי ω היא k־תבנית דיפרנציאלית על M_2. אזי אפשר להסתכל על

$$\tilde{\omega} = f^*\omega \in \Omega^k(M_1)$$

על ידי

$$\tilde{\omega}_x\left(v_1,\ldots,v_k\right)=\omega_{f(x)}\left(D_f\left(x\right)v_1,\ldots,D_f\left(x\right)v_k\right)$$

בפרט, אם $\Sigma\subseteq\mathbb{R}^n$ משטח m-מימדי, $r:G\to\Sigma$ פרמטריזציה, עבור $G\subseteq\mathbb{R}^m$, ואם $\omega\in\Omega^k\left(\Sigma\right)$, נוכל להגדיר $\tilde{\omega}=r^*\omega\in\Omega^k\left(G\right)$, עבור

$$r^*:\Omega^k\left(\Sigma\right)\to\Sigma^k\left(G\right)$$

4. נחזור להגדרה הכללית. מתקיים $\Lambda^1\left(V\right)=V^*$ מההגדרה.
5. ניקח $k=n=\dim V$, ואז נדבר על $\Lambda^n\left(V\right)$. הדוגמא הברורה לאיבר שם היא הדטרמיננטה - וזו הדוגמא היחידה (עד כדי קבוע) - נשאיר את זה כתרגיל.
6. ניקח $V=\mathbb{R}^2$. $\Lambda^2\left(V\right)$ נפרש על ידי הדטרמיננטה. ניקח $\sigma_1,\sigma_2\in\Lambda^1\left(V\right)$ שפורשים עם

$$\sigma_1\left(\xi_1,\xi_2\right)=\xi_1$$
$$\sigma_2\left(\xi_1,\xi_2\right)=\xi_2$$

כעת נכתוב

$$\det\left(v_1,v_2\right)=\begin{vmatrix}v_{11}&v_{21}\\v_{12}&v_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sigma_1\left(v_1\right)&\sigma_1\left(v_2\right)\\\sigma_2\left(v_1\right)&\sigma_2\left(v_2\right)\end{vmatrix}=:\left(\sigma_1\wedge\sigma_2\right)\left(v_1,v_2\right)$$

הגדרה 1.3 לכל $\alpha_1,\alpha_2\in\Lambda^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ נגדיר את מכפלת wedge שלהם:

$$\left(\alpha_1\wedge\alpha_2\right)\left(v_1,v_2\right)=\begin{vmatrix}\alpha_1\left(v_1\right)&\alpha_1\left(v_2\right)\\\alpha_2\left(v_1\right)&\alpha_2\left(v_2\right)\end{vmatrix}$$

בעצם

$$\wedge:\Lambda^1\left(\mathbb{R}^2\right)\times\Lambda^1\left(\mathbb{R}^2\right)\to\Lambda^2\left(\mathbb{R}^2\right)$$

תרגיל זו פעולה שמקיימת

$$\alpha_1=a_1\sigma_1+a_2\sigma_2$$
$$\alpha_2=b_1\sigma_1+b_2\sigma_2$$
$$\left(\alpha_1\wedge\alpha_2\right)=\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\left(\sigma_1\wedge\sigma_2\right)$$

כעת נדבר על wedge של תבניות דיפרנציאליות על תחום $U\subseteq\mathbb{R}^2$. נניח כי $\alpha,\beta\in\Omega^1\left(U\right)$, אז לכל $q\in U$, $\alpha_q,\beta_q\in\left(T_qU\right)^*\cong\mathbb{R}_2^*$. נגדיר

$$\left(\alpha\wedge\beta\right)_q=\alpha_q\wedge\beta_q\in\Lambda^2\left(T_qU\right)$$

לכן $\alpha\wedge\beta\in\Omega^2\left(U\right)$.