חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

21 ביוני 2017

1 אוריאנטציה על משטחים/יריעות

רעיון משטח/יריעה מוגדר על ידי "טלאים" של קבוצות פתוחות בתוך $\mathbb{R}^n$.

שאלה מה קורה כאשר שתי מפות נחתכות?

נניח שיש לנו יריעה $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ דו־מימדית, ושתי מפות שלה:

$$r_1 : G_1 \to \mathbb{R}^3$$
$$r_2 : G_2 \to \mathbb{R}^3$$

נניח שהתמונות נחתכות, משמע $r_1\left(G_1\right) \cap r_2\left(G_2\right) \neq \emptyset$. על התמונה ההפוכה של החיתוך אפשר להגדיר העתקת מעבר, למשל $r_2^{-1} \circ r_1$, שאינה לינארית. נסתכל על הלינאריזציה שלה (דיפרנציאל):

$$d\left(r_2^{-1} \circ r_1\right) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

בצורה לא פורמלית, נרצה לומר שיש רק 2 דרכים לבחור בסיס של $\mathbb{R}^2$ במצב הזה. זה לא מדוייק ־ יש שתי מחלקות שקילות של אפשרויות (במובן של אוריינטציה).

הגדרה 1.1 שתי פרמטריזציות של יריעה (מפות) בעלות חיתוך לא ריק משרות את אותה האוריינטציה אם הדטרמיננט של הדיפרנציאל של העתקת המעבר שהן מגדירות הוא חיובי.

הגדרה 1.2 אוריינטציה על יריעה/משטח היא כיסוי של המשטח על ידי מפות, כך שכל זוג מביניהן (בעל חיתוך לא ריק) משרה את אותה אוריינטציה.

דוגמא $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. אפשר לכסות את היריעה הזו בעזרת 2 מפות בלבד (העתקות סטריאוגרפיות):

$$r_{\pm}^{-1}\left(x_1, x_2, x_3\right) = \frac{1}{1 \pm x_3}\left(x_1, x_2\right)$$
$$r_{\pm}\left(y_1, y_2\right) = \frac{1}{1 + y_1^2 + y_2^2}\left(2y_1, 2y_2, \pm\left(1 - y_1^2 + y_2^2\right)\right)$$

אם הדטרמיננט של היעקוביאן יוצא שלילי, מרכיבים עם שיקוף ומקבלים דטרמיננט חיובי.

טענה 1.3 יש יריעות לא אוריינטביליות.

דוגמא טבעת מוביוס ־ לא נוכיח.

1.1 אינטגרציה על יריעות

אנחנו למעשה מדברים על אינטגרציה של n־תבניות דיפרנציאליות (דיברנו בשיעור שעבר על שתיים־תבניות) על יריעות אוריינטביליות.

סוד אפשר להגדיר אינטגרציה של n־תבניות גם על יריעות לא אוריינטביליות (אל תנסו את זה בבית).

תרגיל בשיעור שעבר ראינו את הנוסחא

$$\int_G \omega_{r(q)} \left(r_{q_1}(q), r_{q_2}(q)\right) \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2$$

הראו שאם שתי מפות משרות את אותה אוריינטציה, אז כאשר מחשבים את הביטוי הזה לכל אחת מהן, מתקבל אותו ערך אם ורק אם התבנית ω היא אנטיסימטרית.

הגדרה 1.4 בהינתן מרחב וקטורי V ממרחב n, k־תבנית על V היא העתקה מולטי־לינארית

$$\omega : \overbrace{V \times \cdots \times V}^{k} \to \mathbb{R}$$

שהיא:

1. מולטילינארית כמובן.
2. אנטיסימטרית: החלפת שתי קואורדינטות נותנת $-$ לפני הביטוי המקורי).

נסמן $\wedge^k(V)$ את אוסף התבניות הבי־לינאריות מדרגה k.

הערה 1.5 $\wedge^1(V) \cong V^*$. בנוסף, אם V ממימד n, $m > n$, אזי $\wedge^m(V) = 0$ (בגלל המולטילינאריות והאנטיסימטריות ־ נשאיר כתרגיל).

דוגמא ניקח מרחב V ובסיס $e_1, \ldots, e_n$. ניקח את הבסיס הדואלי שלו, $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ שמוגדר על ידי

$$e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

אז יש לנו שתיים־תבנית:

$$\left(e_1^* \wedge e_2^*\right)(v, w) = v_1 w_2 - v_2 w_1$$

תרגיל (חשוב!) האוסף $\left\{e_i^* \wedge e_j^*\right\}_{i<j}$ מהווים בסיס של $\wedge^2(V^n)$.

תרגיל (קל אחרי הקודם) $\dim \wedge^k(V^n) = \binom{n}{k}$.

הגדרה 1.6 נגדיר את הפעולה שעשינו, $\wedge$. היא נקראת $\mathrm{wedge-product}$, ועובדת כך: אם $\omega\in\wedge^k\left(V^n\right),\eta\in\wedge^l\left(V^n\right)$, אזי

$$\wedge^{k+l}\left(V^n\right)\ni\left(\omega\wedge\eta\right):\left(\left(v_i\right)_{i=1}^{k+l}\right)\mapsto\sum_{\substack{\sigma\in S_{k+l}\\ \sigma(1)<\cdots<\sigma(k)\\ \sigma(k+1)<\cdots<\sigma(k+l)}}\omega\left(\left(v_{\sigma(i)}\right)_{i=1}^{k}\right)\eta\left(\left(v_{\sigma(k+j)}\right)_{j=1}^{l}\right)$$

תרגיל האופרטור $\wedge$ הוא מוגדר היטב, בי לינארי, אסוציאטיבי, וסופר קומוטטיבי, משמע

$$\omega\wedge\eta=\left(-1\right)^{kl}\eta\wedge\omega$$

אפשר גם לדבר על מרחב כל התבניות:

$$\wedge^*\left(V^n\right)=\bigoplus_{k=1}^{n}\wedge^k\left(V^n\right)$$