חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

14 ביוני 2017

1 משפט גרין

המשפט, שניסחנו אותו בשיעור שעבר, אמר שאם G תחום עם שפה "טובה", $\alpha = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ היא אחד־תבנית דיפרנציאלית על $\overline{G}$, אזי

$$\int\limits_{\partial G} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1.1 חישוב שטח

נרצה

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

בתחום G.

דוגמאות

$$\begin{aligned} \alpha &= -y\mathrm{d}x \\ \alpha &= x\mathrm{d}y \\ \alpha &= \frac{1}{2}\left(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y\right) \end{aligned}$$

דוגמא נסמן $z_i = (x_i, y_i)$, ונתבונן בקו הפוליגונאלי הסגור $\Gamma = [z_0, \ldots, z_N = z_0]$ ובתחום G שהוא חוסם. אזי

$$\mathrm{area}\,(G) = \int\limits_{\partial G} x\mathrm{d}y = \sum_{i=0}^{N} \int\limits_{[z_i, z_{i+1}]} x\mathrm{d}y$$

ניקח מסילה $\gamma_i(t) = z_i(1-t) + z_{i+1}t$ עבור $t \in [0,1]$ ואז

$$\int\limits_{[z_i, z_{i+1}]} x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(x_i(1-t) + x_{i+1}t\right)\left(y_{i+1} - y_i\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(x_i + x_{i+1}\right)\left(y_{i+1} - y_i\right)$$

ולכן

$$\text{area}\,(G) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(x_i + x_{i+1}\right)\left(y_{i+1} - y_i\right)$$

1.2 נוסחת קושי

נניח כי $G \subseteq \mathbb{C}$ תחום, $f : G \to \mathbb{C}$ חלקה C^1. נכתוב $f = u + iv$. לכל $z \in G$,

$$\mathrm{d}_z f : T_z\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$$
$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}u + i\mathrm{d}v = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

נכתוב כעת

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = u_y + iv_y$$

כעת,

$$\mathrm{d}z : T_{z_0}\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$$

ויש לנו גם את

$$\overline{z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$\mathrm{d}\overline{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$$

נמצא את המקדמים בפירוק $\mathrm{d}f = A\mathrm{d}z + B\mathrm{d}\overline{z}$. נכתוב

$$\mathrm{d}f = A\mathrm{d}z + B\mathrm{d}\overline{z} = A\left(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y\right) + B\left(\mathrm{d}x - i\mathrm{d}y\right) = \left(A + B\right)\mathrm{d}x + i\left(A - B\right)\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

מכאן נשיג

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}$$

נשים לב שאי אפשר לחשוב על אלה כנגזרות באמת - זה רק סימון פורמלי. נשים לב שנוכל לפתח:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(u_x + iv_x + i\left(u_y + iv_y\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(u_x - v_y\right) + i\frac{1}{2}\left(u_y + v_x\right)$$

ונשים לב שזה מתאפס אם ורק אם משוואות קושי־רימן מתקיימות.

תרגיל

$$(fg)_{\overline{z}}=f_{\overline{z}}g+fg_{\overline{z}}$$

ולכן אם g אנליטית

$$(fg)_{\overline{z}}=f_{\overline{z}}g$$

משפט 1.1 (קושי־גרין) יהי $G\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום עם שפה "טובה" (חלקה C^1 למקוטעין) ונניח כי $f:G\to\mathbb{C}$ פונקציה C^1 על $\overline{G}$. אזי לכל $w\in G$ מתקיים

$$f\left(w\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f\left(z\right)}{z-w}\,\mathrm{d}z-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G}\frac{\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}}{z-w}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

מסקנה 1.2 אם f אנליטית על $\overline{G}$ אזי

$$f\left(w\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f\left(z\right)}{z-w}\,\mathrm{d}z$$

וזו נוסחת קושי הרגילה מפונקציות מרוכבות.

מסקנה 1.3 אם $f\in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ עם תומך קופקטי, ניקח את G להיות עיגול שמכיל את $\mathrm{supp}f$, ואז

$$f\left(w\right)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}}\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{z-w}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

אם f חלקה, ונגדיר $H=\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}$, אז היא רציפה. אזי

$$x\mapsto\iint\limits_{G}\frac{H\left(z\right)}{z-w}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

אם $H\left(w\right)\neq0$, הפונקציה בתוך האינטגרל לא חסומה בסביבת w. עם זאת, נוכל להגדיר

$$\mathbb{C}_r=\{z\mid r\leq|z-w|<2r\}$$

ואז

$$\left|\frac{H\left(z\right)}{z-w}\right|\leq\frac{C}{|z-w|}\leq\frac{C}{r}$$

כאשר C הוא החסם של H על הכדור (כי היא קומפקטית והפונקציה H רציפה). השטח של הקבוצה הוא cr^2, ולכן חסם על האינטגרל הוא Ccr, ואז אם נבחר $r=\frac{1}{2^k}$ נראה שהאינטגרל כן מתכנס שם.