חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ארזים ©

7 ביוני 2017

1 אחד־תבניות דיפרנציאליות

הגדרנו בשיעור שעבר אחד־תבניות דיפרנציאליות כבחירה של פונקציונאל לינארי על המרחב המשיק בכל נקודה:

$$U \ni x \to \omega_x \in T_x^* \mathbb{R}^n$$

דיברנו גם על אינטגרציה של תבניות ־ לקחנו $\gamma : [a,b] \to U$ מסילה, ותבנית ω, והגדרנו

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{a}^{b} \omega_{\gamma(t)} \left(\gamma'\left(t\right)\right) \mathrm{d}t$$

תכונות

1. אם $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\mu = \gamma \circ \varphi$ כאשר $\varphi : J \to I$ פונקציה חלקה, מונוטונית עולה וחד־חד־ערכית ועל, נוכל לכתוב עבור $s \in J$ את $t \in I$ בתור $t = \varphi\left(s\right)$. כעת

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{I} \omega_{\gamma(t)} \left(\gamma'\left(t\right)\right) \mathrm{d}t = \left[t = \varphi\left(s\right)\right] = \int\limits_{J} \omega_{\gamma(\varphi(s))} \left(\gamma'\left(\varphi\left(s\right)\right)\right) \varphi'\left(s\right) \mathrm{d}s =$$
$$= \int\limits_{J} \omega_{\mu(s)} \left(\gamma'\left(\varphi\left(s\right)\right) \varphi'\left(s\right)\right) \mathrm{d}s = \int\limits_{J} \omega_{\mu(s)} \left(\mu'\left(s\right)\right) \mathrm{d}s = \int\limits_{\mu} \omega$$

2. אם $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $-\gamma$ זאת עקומה שהולכת בכיוון ההפוך, $-\gamma : [-b,-a] \to \mathbb{R}^n$ על ידי $\left(-\gamma\right)\left(s\right) = \gamma\left(-s\right)$, אזי

$$\int\limits_{-\gamma} \omega = -\int\limits_{\gamma} \omega$$

וזאת משום שמתקיים

$$\int\limits_{a}^{b} = \int\limits_{-a}^{-b} = -\int\limits_{-b}^{-a}$$

3. ניקח γ שהיא שרשור של γ_1, γ_2, ונכתוב $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, במובן שמתקיים

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

תרגיל תהי $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ חלקה C^1 למקוטעין. נניח כי $\gamma([0,1]) \subseteq U$, ω אחד־תבנית דיפרנציאלית על U. אזי

$$\left|\int_{\gamma} \omega\right| \leq \max_{x\in\gamma([0,1])} |\omega_x| \, L(\gamma)$$

טענה 1.1 יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תהי ω אחד־תבנית דיפרנציאלית על U. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. לכל עקומה סגורה $\gamma \subseteq U$ מתקיים

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

2. לכל שתי עקומות $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq U$ עם אותן נקודות התחלה וסוף מתקיים

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

3. קיימת פונקציה $f : U \to \mathbb{R}$ חלקה C^1 עם $\omega = \mathrm{d}f$.

הוכחה: ברור שמתקיים $2 \iff 1$ בגלל היכולת לשרשר עקומות. כעת נראה $3 \Rightarrow 1,2$. נניח כי $\omega = \mathrm{d}f$, ונניח כי $\gamma : [a,b] \to U$. אז

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \mathrm{d}f = \int_a^b \mathrm{d}_{\gamma(t)} f\left(\gamma'(t)\right) \,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\left(\gamma(t)\right) \,\mathrm{d}t = f\left(\gamma(b)\right) - f\left(\gamma(a)\right) = 0$$

כעת נראה $2 \Rightarrow 3$. נקבע נקודה $q \in U$, ולכל $x \in U$ ניקח עקומה $\gamma_x : [0,1] \to U$ עם $\gamma(0) = q$, $\gamma(1) = x$. נגדיר

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$$

$f(x)$ מוגדרת ביחידות לפי תכונה 2 שראינו קודם. נכתוב

$$\omega_x = \sum a_i(x) \,\mathrm{d}x_i$$

ואז נרצה לדעת האם

$$\omega = \mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i$$

נבדוק שמתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1$. נכתוב

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(x_1 + \varepsilon, x_2, \ldots, x_n\right) - f\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\varepsilon}$$

נכתוב $y = \left(x_1 + \varepsilon, x_2, \ldots, x_n\right)$ ואז

$$f(y) - f(x) = \int\limits_{\vec{[x,y]}} \omega = \begin{bmatrix} \gamma(t) = x + te_1 \\ t \in [0, \varepsilon] \\ \gamma'(t) = (1, 0, \ldots, 0) \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{\varepsilon} \omega_{\gamma(t)}\left(\gamma'(t)\right) = \int\limits_0^{\varepsilon} a_1\left(x_1 + \varepsilon, x_2, \ldots, x_n\right) \mathrm{d}t$$

ואז נקבל

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^{\varepsilon} a_1\left(x_1 + t, x_2 \ldots, x_n\right) \mathrm{d}t = a_1\left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

באותו אופן מראים את כל שאר הנגזרות החלקיות. ■

משפט 1.2 (פואנקרה) נניח $\omega = \sum a_i(x)\,\mathrm{d}x_i$ אחד־תבנית דיפרנציאלית. אם $\omega = \mathrm{d}f$, כלומר

$$a_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

אזי בהכרח

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_j}$$

בכדור או בכל $\mathbb{R}^n$, זה תנאי מספיק לכך שהתבנית מדוייקת (כלומר יש לה קדומה).