חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

15 במרץ 2017

1 יריעות

בשיעור שעבר ראינו מה זו הצגה פרמטרית: $G \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחה, $r : G \to \mathbb{R}^n$, $M = r(G)$.
ראינו את המקרה הפרטי בו $k = 1$, $n = 2$, $r : I \to \mathbb{R}^2$, כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח, $M = r(I)$.

ראינו שנדרשים לנו התנאים הבאים:

1. $r : I \to r(I)$ הומיאומורפיזם.
2. r חלקה ורגולרית (כלומר לכל $t \in I$, $r'(t) \neq 0$).

כעת נעבור לדון בהצגה סתומה.

1.1 הצגה סתומה

נמשיך להתמקד במקרה של יריעות חד־מימדיות במישור $\mathbb{R}^2$. לוקחים $U \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה, וכן $f : U \to \mathbb{R}^2$ חלקה. אנו מתבוננים בקבוצה

$$M = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$$

דוגמאות

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x, y) = xy$. f חלקה, וקבוצת האפסים היא איחוד שני הצירים. קבוצה זו לא חלקה ־ ראשית הצירים היא נקודה בעייתית. כמו כן, $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, בניגוד לכל נקודה אחרת.
2. $f(x, y) = x^3 - y^2$. ראינו את העקומה הזו עם ההצגה הפרמטרית $r(t) = (t^2, t^3)$, וכמו קודם, הנקודה $(0, 0)$ היא נקודה בעייתית ־ והגרדיאנט מתאפס בה.
3. $f(x, y) = x^2 + y^2$. קבוצת האפסים של f היא ראשית הצירים, ונקודה אחת היא כמובן לא דבר חד מימדי, כפי שהיינו מצפים.

תרגיל (לא פשוט) אם $A \subseteq \mathbb{R}^2$ סגורה אזי קיימת פונקציה חלקה שקבוצת האפסים שלה היא בדיוק A.

טענה 1.1 תהי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ קבוצה פתוחה, $f:U\to\mathbb{R}$ חלקה, $q_0=(x_0,y_0)\in U$, $\nabla f(q_0)\neq 0$. אזי קיימת סביבה V של q_0 בתוך $\mathbb{R}^2$, שחלקית לקבוצה U, כך שהקבוצה $\{(x,y)\in V\mid f(x,y)=0\}$ היא גרף של פונקציה חלקה.

הוכחה: נתון כי $\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0)$. נובע כי אחת הנגזרות החלקיות לא מתאפסת, ומכאן הטענה נובעת ממשפט הפונקציה הסתומה. ∎

1.2 במימד כללי

1. מפרמטריזציה $r:G\to\mathbb{R}^n$, כאשר $g\subseteq\mathbb{R}^k$ פתוחה, נדרוש כי לכל $x\in G$ העתקה הדיפרנציאל $D_xr=Dr(x)$ היא בעלת דרגה מקסימלית, $\mathrm{rk}D_xr=k$. באופן שקול, $D_xr:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ חד־חד־ערכית. בנוסף נדרוש כי $r:G\to r(G)$ הומיאומורפיזם.

2. מהצגה סתומה, שהיא מערכת משוואות $f_1=0,\ldots,f_{n-k}=0$ על $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, נדרוש כי לכל $x\in M=\{x\mid f_i(x)=0\}$, הגרדיאנטים $\nabla f_i(x)$ בלתי תלויים לינארית.
נוכל להגדיר העתקה

$$F:U\to\mathbb{R}^{n-k}$$
$$F(x)=(f_1(x),\ldots,f_{n-k}(x))$$

אזי

$$M=F^{-1}(0_{n-k})$$

ואז התנאי הקודם, על אי תלות לינארית, שקול לדרגה מקסימלית $(n-k)$ של D_xF לכל $x\in M$ (F רגולרית על M).

הגדרה 1.2 תהי $F:U\to\mathbb{R}^n$, כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^m$ קבוצה פתוחה, ויהי $x\in U$. F נקראת <u>רגולרית</u> בנקודה x אם

$$\mathrm{rk}D_xf=\min(n,m)$$

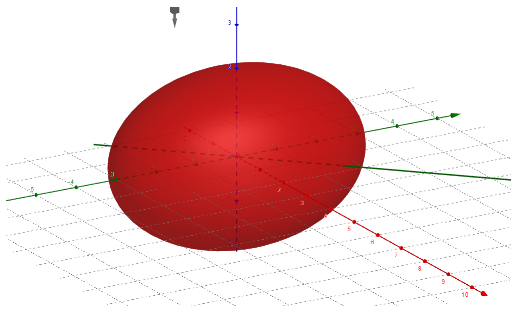
אחרת, נגיד כי x <u>נקודה סינגולרית</u> של F.

1.3 שניוניות

1.3.1 אליפסואיד

מתבוננים במשוואה מהצורה

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



איור 1: אליפסואיד

כל הנקודות כאן הן רגולריות, וניתן לכתוב ייצוג פרמטרי, כביכול:

$$x = a\cos\varphi\cos\theta$$
$$y = b\sin\varphi\cos\theta$$
$$z = c\sin\theta$$

כאשר כאן $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. זה לא ייצוג פרמטרי לחלוטין שכן הקבוצות שמהן הפרמטרים לקוחים לא פתוחות.

1.3.2 היפרבולואיד חד־יריעתי

מתבוננים במשוואה מהצורה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

כל הנקודות רגולריות. יש שוב ייצוג פרמטרי:

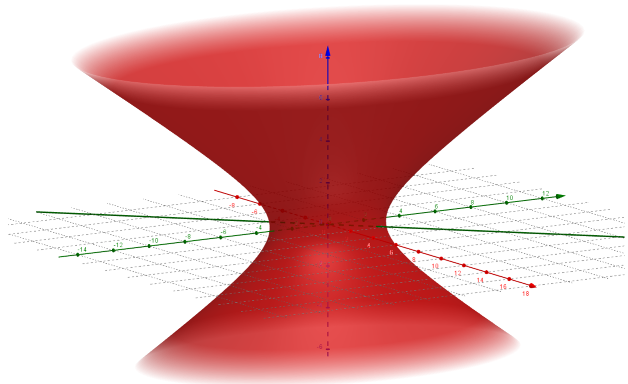
$$x = a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}\cos\varphi$$
$$y = b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}\sin\varphi$$
$$z = z$$

כאשר $0 \le \varphi \le \pi$, $-\infty < z < \infty$.

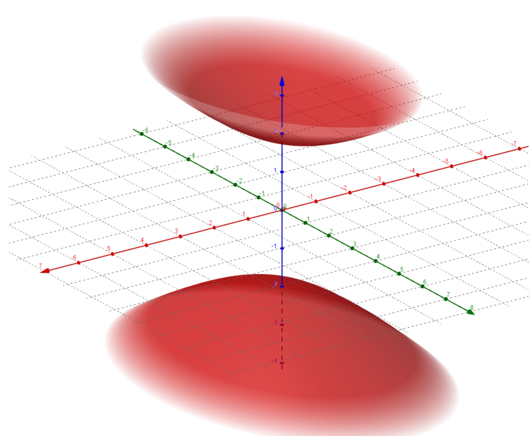
1.3.3 היפרבולואיד דו־יריעתי

מתבוננים במשוואה מהצורה

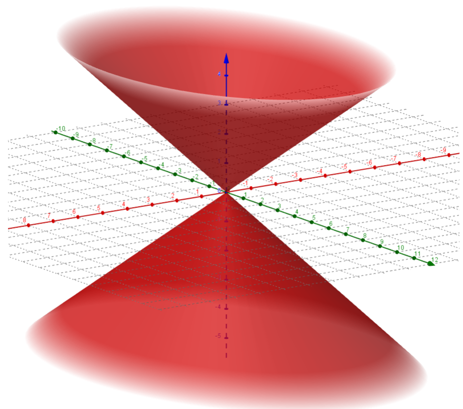
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



איור 2: היפרבולואיד חד־יריעתי



איור 3: היפרבולואיד דו־יריעתי



איור 4: קונוס

כל הנקודות הן רגולריות. זהו איחוד של שני גרפים,

$$z = \pm c\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

1.3.4 קונוס

מתבוננים במשוואה מהצורה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

יש נקודה סינגולרית אחת, $(0,0,0)$, וכל שאר הנקודות רגולריות.

1.3.5 צילינדר

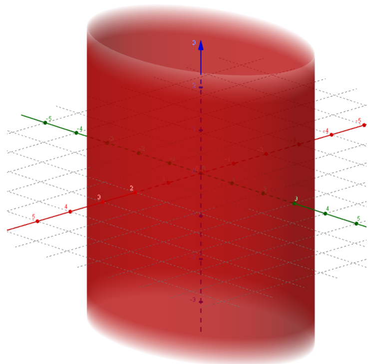
מתבוננים במשוואה מהצורה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

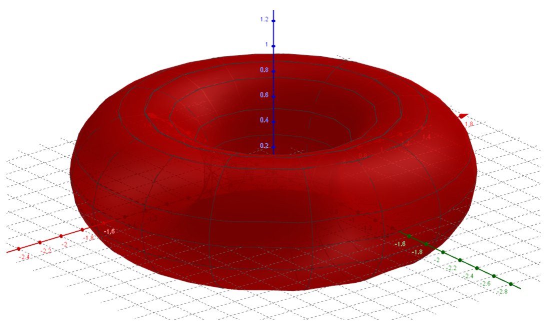
וכל הנקודות רגולריות. יש ייצוג פרמטרי:

$$x = a\cos\varphi$$
$$y = b\sin\varphi$$
$$z = z$$

כאשר $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.



איור 5: צילינדר



איור 6: טורוס

1.3.6 טורוס

אם יש לנו עקומה $\gamma\left(s\right)=\left(\gamma_{1}\left(s\right),0,\gamma_{3}\left(s\right)\right)$, אז מקבלים משטח סיבוב

$$\Gamma\left(s,t\right)=\left(\gamma_{1}\left(s\right)\cos t,\gamma_{1}\left(s\right)\sin t,\gamma_{3}\left(s\right)\right)$$

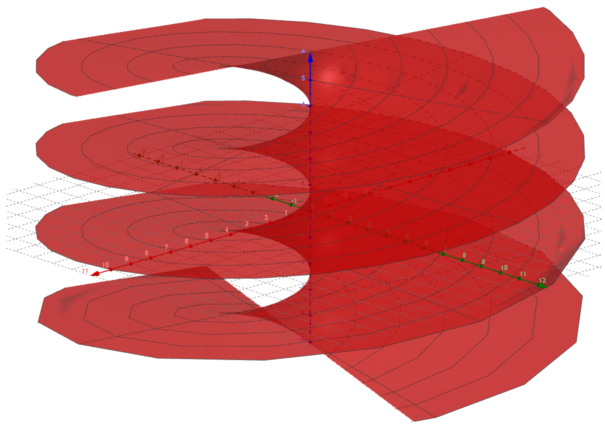
למשל, אם ניקח $\gamma\left(s\right)=\left(a+b\cos s,0,b\sin s\right)$, נקבל טורוס:

$$\Gamma\left(s,t\right)=\left(\left(a+b\cos s\right)\cos t,\left(a+b\cos s\right)\sin t,b\sin s\right)$$

1.3.7 ספירלה

זוהי העתקה מהצורה

$$t\rightarrow\left(\cos t,\sin t,t\right)$$



איור 7: הליקואיד

אפשר להעביר דרכה ״מדרגות חלקות״, כלומר קווים ישרים בצורה מסויימת, ולקבל <u>הליקואיד</u>:

$$(s,t) \to (s\cos t, s\sin t, t)$$

עם $s > 0$, $t \in \mathbb{R}$.