

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

5 ביוני 2017

1 תבניות דיפרנציאליות

1.1 אחד-תבניות דיפרנציאליות

אם f פונקציה חלקה C^1 במרחב \mathbb{R}^n , $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, אז לכל $x \in \mathbb{R}^n$ אפשר להסתכל על הדיפרנציאל $df(x) = d_x f$ בתור העתקה

$$d_x f: T_x \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

לכל $v \in T_x \mathbb{R}^n$ אפשר לבחור עקומה $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ עם $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$ ואז

$$d_x f(v) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0}$$

הגדרה 1.1 אוסף כל הפונקציונאלים הלינאריים על המרחב המשיק $T_x \mathbb{R}^n$ נקרא המרחב הקו-משיק, ומסומן $T_x^* \mathbb{R}^n$

תזכורת אם V מרחב ווקטורי מעל \mathbb{R} , אפשר להגדיר את המרחב הדואלי שלו, V^* , להיו תאוסף הפונקציונאלים הלינאריים $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. לכן

$$T_x^* \mathbb{R}^n = (T_x \mathbb{R}^n)^*$$

נסתכל על הפונקציות

$$\begin{aligned} x_i: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x_i(t_1, \dots, t_n) &= t_i \\ dx_i: T_x \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ dx_i(\xi_1, \dots, \xi_n) &= \xi_i \end{aligned}$$

ואז למעשה קיבלנו בסיס דואלי לבסיס הסטנדרטי:

$$dx_1, \dots, dx_n$$

דוגמא ניקח כעת

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i^2$$

$$df_x(\xi) = 2x_i \xi_i$$

נעיר שאמורים לכתוב תמיד $d_x x_1$ וכן הלאה, אבל אנחנו נכתוב dx_1 . הבסיס הסטנדרטי של $T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ יהי e_1, \dots, e_n , ואז יש לנו את הבסיס הדואלי שלו:

$$dx_i(e_j) = \delta_{i,j}$$

סימון מקובל אחר לבסיס הסטנדרטי של $T_x \mathbb{R}^n$ הוא $\frac{\partial}{\partial x_i}$, ואז הבסיס הסטנדרטי של המרחק הקורמשיק הוא

$$dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{i,j}$$

כעת, אם $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חלקה, אזי

$$d_x f(\xi) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \xi_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j(\xi)$$

לכן נקבל

$$d_x f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \in T_x^* \mathbb{R}^n$$

ובאופן כללי

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

הגדרה 1.2 תבנית דיפרנציאלית לינארית (אחד-תבנית דפריציאלית, שדה קו־ווקטורי) המוגדרת על קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ היא התאמה

$$U \ni x \mapsto \omega_x \in T_x^* \mathbb{R}^n$$

כאשר

$$\omega_x(\xi) = \omega_x \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \omega_x(e_j) \xi_j$$

נסמן $a_j(x) = \omega_x(e_j)$ ואז

$$\omega_x = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j$$

בדרך כלל נניח שהמקדמים $a_i(x)$ חלקים C^1 . במקרה זה, האחד-תבנית הדיפרנציאלית ω תיקרא חלקה C^1 . אם ω היא נגזרת של פונקציה f , נסמן $\omega = df$. במקרה $n = 1$, אם ניקח

$$dx \in T_x^*\mathbb{R}$$

ולוקחים תבנית

$$\omega = a(x) dx$$

כעת אם יש f עבורה $\omega = df$ נקבל $df = f'(x) dx$, ולכן נחפש f עם $f'(x) = a(x)$. יש כזו, כי a רציפה. במקרה $n = 2$, החיים יותר מסובכים - לוקחים

$$\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$$

אנחנו רוצים למצוא f עבורה

$$\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

וזה לא תמיד אפשרי. תנאי הכרחי הוא:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial y}$$

תנאי זה מספיק על תחום, אבל לא על קבוצה פתוחה כללית.

1.2 אינטגרציה על אחד-תבניות דיפרנציאליות

ניקח ω אחד-תבנית דיפרנציאלית על \mathbb{R}^n . ניקח $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, וניקח חלוקה $a = t_0 < \dots < t_N = b$ נגדיר

$$v_k = \gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)$$

ואז נרצה להסתכל על הגודל

$$\sum \omega_{\gamma(t_i)}(v_i) = \sum \omega_{\gamma(t_i)}(\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i))$$

הגדרה 1.3 אינטגרל של אחד-תבנית דיפרנציאלית ω על עקומה γ הוא

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

כעת, אם

$$\omega_x = \sum a_j(x) dx_j$$

אזי

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt = \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$$

דוגמאות

1. בתוך \mathbb{R}^3 ניקח

$$\omega = z dx + x dy + y dz$$

ואת המסילה $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ שמקיימת

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

כאשר $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ אז

$$\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = -t \sin t + \cos^2 t + \sin t$$

ולכן אחרי חישובים נקבל

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} -t \sin t + \cos^2 t + \sin t dt = 3\pi$$

2. בתחום $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ניקח

$$\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

ואת המסילה $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ כלומר $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ אז

$$\omega_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

לכן

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

נוכל להיווכח בקלות כי $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ כעת, אם נסמן $\theta(x, y)$ את הארגומנט של נקודה במישור, נקבל

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = b \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} = a\end{aligned}$$

ולכן למעשה מצאנו קדומה - אבל היא לא מוגדרת על כל התחום $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ באופן חלק. צריך להוציא קרן (למשל את החלק השלילי של ציר x) ואז אפשר. אפשר לראות שאי אפשר להגדיר על כל המישור המנוקב כי אחרת היינו מקבלים

$$2\pi = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} df = \int_0^{2\pi} d_{\gamma(t)} f(\gamma'(t)) dt = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = 0$$