חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

29 במאי 2017

את תחילת השיעור השקענו בחזרה על ההוכחה של משפט הדיברגנץ לתחום בעל שפה לא חלקה. נותר לנו כעת להראות את קיום הפונקציה שהשתמשנו בה, שסימנו ψ. נרצה שהיא תקיים את הדברים הבאים:

1. $0 \leq \psi \leq 1$.
2. $\psi \equiv 1$ על $K_{+\varepsilon}$.
3. $\psi \equiv 0$ מחוץ לסביבה $K_{+3\varepsilon}$.
4.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla \psi| = o\left(1\right)$$

נשתמש בקונספט של קונבולוציה כדי לקבל את הפונקציה הזו. ניקח פונקציה חלקה C^1 שנסמנה $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ המקיימת

$$\chi\left(x\right) = 0$$

עבור $|x| \geq 1$, $\chi \geq 0$ וכן $\int_{\mathbb{R}^n} \chi = 1$. נגדיר

$$\chi_\varepsilon\left(x\right) = \varepsilon^{-n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

ואז נקבל

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon\left(x\right)\,\mathrm{d}x = \varepsilon^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,\mathrm{d}x = \left[y = \frac{x}{\varepsilon}\right] =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi\left(y\right)\,\mathrm{d}y = 1$$

כעת ניקח את $\mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}$ ונהפוך אותה לחלקה על ידי קונבולוציה (אפשר להוכיח שאפילו שהאינדיקטור לא חלק, קונבולוציה עם משהו חלק כמו χ_ε תהיה חלקה). נגדיר

$$\psi\left(x\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}\left(y\right) \chi_\varepsilon\left(x-y\right)\,\mathrm{d}y$$

אפשר ממש לחשב (כמו בחדוא 2) ולראות שכל הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות לפי הנוסחה. לכן ψ חלקה C^1, והביטוי לנגזרת החלקית הוא הוא

$$\psi_{x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y) \left(\chi_\varepsilon\right)_{x_j}(x-y)\, \mathrm{d}y$$

נותר לנו לראות את שאר התכונות. ברור כי $\psi \geq 0$. מצד שני, האינדיקטור חסום על ידי 1 ולכן

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y)\, \chi_\varepsilon(x-y)\, \mathrm{d}y \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)\, \mathrm{d}y = 1$$

לכן קיבלנו את התנאי הראשון שרצינו. כעת,

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(x-y)\, \chi_\varepsilon(y)\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{\varepsilon B_1(0)} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(x-y)\, \chi_\varepsilon(y)\, \mathrm{d}y$$

אם $x \in K_{+\varepsilon}$ אזי עבור כל $y \in \varepsilon B$, $x - Y \in K_{+2\varepsilon}$. לכן

$$\psi(x) = \int_{\varepsilon B} \chi_\varepsilon(y)\, \mathrm{d}y = 1$$

זה התנאי השני שרצינו. אם $x \notin K_{+3\varepsilon}$, וכן $y \in \varepsilon B$, אזי בהכרח $x - y \notin K_{+2\varepsilon}$, ולכן

$$\psi(x) = \int_{\varepsilon B} 0 = 0$$

וזה התנאי השלישי. כעת, נרשום

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y)\, \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j}(x-y)\, \mathrm{d}y$$

ואז

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x)\right|\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y)\left|\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}(x-y)\right|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y)\left|\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}(x-y)\right|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}\right|(x-y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}(x)\right|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{K_{+2\varepsilon}}(y)\,\mathrm{d}y\right)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j}(x)\right|\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= v_n\left(K_{+2\varepsilon}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\left(\varepsilon^{-n}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)}{\partial x_j}(x)\right|\,\mathrm{d}x =$$

$$= v_n\left(K_{+2\varepsilon}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\varepsilon^{-n}\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\chi}{\partial x_j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\,\mathrm{d}x =$$

$$= v_n\left(K_{+2\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x_j}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\,\mathrm{d}x = \left[z=\frac{x}{\varepsilon}\right] =$$

$$= \underbrace{v_n\left(K_{+2\varepsilon}\right)}_{o(\varepsilon)}\frac{1}{\varepsilon}\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\chi}{\partial x_j}(z)\right|\,\mathrm{d}z}_{constant}\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

לכן הראינו כי

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}(x)\right|\,\mathrm{d}x = o(1)$$

לכל j, ואז

$$|\nabla f| = \sqrt{\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right)^2} \leq \sum\left|\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\right|$$

ולכן גם

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\nabla\psi(x)|\,\mathrm{d}x = o(1)$$