חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

22 במאי 2017

1 משפט הדיברגנץ

טענה 1.1 (פירוק יחידה חלק) תהי $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קומפקטית, ויהי

$$K\subseteq\bigcup_{i=1}^{N}U_{i}$$

כיסוי פתוח שלה. קיימות פונקציות חלקות $\varphi_{1},\ldots,\varphi_{N}:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ בעלות תומך קומפקטי כך שמתקיים

1. $\mathrm{supp}\varphi_{i}\subseteq U_{i}$ לכל i.
2. $\varphi_{i}\geq0$ לכל i.
3. על K מתקיים

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_{i}\left(x\right)=1$$

הוכחה: ראינו בשיעור שעבר אבל נחזור עליה. מהלמה של לבג, קיים $\rho>0$ כך שלכל $x\in K$ קיים $1\leq i\leq N$ שעבורו $B\left(x,2\rho\right)\subseteq U_{i}$. ניקח כיסוי של $\mathbb{R}^{n}$ על ידי כדורים פתוחים

$$\begin{aligned}B_{j} & =B\left(x_{j},\rho\right)\\
\left|x_{j}\right| & \to\infty
\end{aligned}$$

נגדיר כעת

$$f_{j}\left(x\right)=\left(\rho^{2}-\left|x-x_{j}\right|^{2}\right)^{2}\cdot\mathbb{1}_{B_{j}}$$

וזו פונקציה אי שלילית חלקה C^{1}. אם נרצה חלקה C^{n} נצטרך לקחת חזקת n, ואפשר אפילו להשיג חלקות C^{∞} עם מאמץ מעט יותר גדול (משהו בסגנון $e^{-\frac{1}{\rho^{2}-\left|x-x_{j}\right|^{2}}}$ או משהו כזה).

נסמן $J\subseteq\mathbb{N}$ את כל אותם $j\in\mathbb{N}$ עבורם $B_j\cap K\neq\emptyset$. לכל $j\in J$, אם ניקח $x\in B_j\cap K$ אזי $\overline{B_j}\subseteq B(x,2\rho)\subseteq U_i$ עבור $1\leq i\leq N$ כלשהו. לכל $j\in J$ נבחר i עבורו $\overline{B_j}\subseteq U_i$. נסמן $i=\sigma(j)$, ונגדיר

$$\varphi_i(x)=\sum_{j\in J,\sigma(j)=i} g_j(x)$$

ברור שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x)=\sum_{B_j\cap K\neq\emptyset} g_j(x)=1$$

כאשר $x\in K$, וכן $\text{supp}\varphi_i\subseteq U_i$. לכן סיימנו. ■

כעת אנחנו מוכנים להוכיח את משפט הדיברגנץ.

משפט 1.2 יהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום חסום וחלק. יהי F שדה וקטורי חלק על $\overline{G}$, ויהי N נורמל היחידה החימוני של G. אזי

$$\int_{\partial G}\langle F,N\rangle\,\mathrm{d}S=\int_{G}\text{div}(F)$$

הוכחה: נסמן $\Gamma=\partial G$. לכל $x\in\overline{G}$ נבחר כדור פתוח B_x עם מרכז x באופן הבא:

1. אם $x\in G$ ניקח $B_x\subseteq G$ כלשהו.
2. אם $x\in\partial G$, נסמן $N=(N_1,\dots,N_n)$, ונרצה שיתקיים $N_i\neq 0$ לכל i. אם זה לא המצב, נפעיל העתקת $y\mapsto T(y)=x+P(y-x)$ כאשר $P\in O(n)$ אורתוגונלית, וכך שכל קואורדינטה של $P(N(x))$ אינה 0. נגדיר

$$\begin{aligned}\tilde{G}&=T(G)\\ \tilde{\Gamma}&=T(\Gamma)\\ \tilde{N}&=P(N)\end{aligned}$$

נשים לב כי $\tilde{N}$ נורמל יחידה חיצוני של $\tilde{G}$ בנקודה x. נסמן $\tilde{N}=\left(\tilde{N}_1,\dots,\tilde{N}_n\right)$, ואז $\tilde{N}_i\neq 0$. בסביבת x, $\tilde{G}$ היא תת גרף או על גרף לפי כל אחת מהקואורדינטות (היה כתרגיל באחת ההרצאות הקודמות). נוכל להניח שזה תמיד תת גרף בכל קואורדינטה, כי אפשר להרכיב את P עם העתקה שהופכת את סימני הקואורדינטות שצריך. לכן נניח כי $\tilde{G}\cap Q_i=\left\{\xi\in Q_i\mid \xi_i<g_i\left(\hat{\xi_i}\right)\right\}$, ואז

$$\tilde{\Gamma}\cap Q_i=\left\{\xi\in Q_i\mid \xi_i=g_i\left(\hat{\xi_i}\right)\right\}$$

כמובן, $x\in Q_1,\dots,Q_n$. נבחר כדור B_x עם מרכז בנקודה x, שמוכל בחיתוך $\bigcap Q_i$.

כעת, נסתכל על $\overline{G} \subseteq \bigcup B_x$. יש תת כיסוי סופי

$$\overline{G} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{x_i}$$

לפי הטענה הקודמת, קיים פירוק יחידה חלק עבור הכיסוי הזה, שנסמנו $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.
נרשום כעת

$$F = \sum_{i=1}^{m} F\varphi_i$$

ברור כעת כי $\operatorname{supp}(F\varphi_i) \subseteq B_{x_i}$. אם נראה את המשפט עבור כל $F\varphi_i$, נוכל לסיים מלינאריות - לכן מספיק להוכיח את המשפט עבור שדה ווקטורי F חלק על $\overline{G}$ כך שמתקיים $\operatorname{suup}F \subseteq B_x$ עבור x כלשהו.
נפריד למקרים.

1. אם $x \in G$, אזי $B_x \subseteq G$. אם כן, לקחנו F עם $\operatorname{supp}F \subseteq B_x$, ולכן $F \equiv 0$ על ∂G. נסמן $F = (F_1, \ldots, F_n)$, ונרצה להראות כי

$$\int_G \operatorname{div}F = 0$$

מתקיים

$$\int_G \operatorname{div}F = \int_{B_x} \operatorname{div}F$$

כעת, אם ניקח i ספציפי, מתקיים

$$\int_{B_x} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \int \int \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \mathrm{d}\hat{x}_i$$

ממשפט ניוטון לייבניץ החלק הפנימי מתאפס לכל בחירה של $\hat{x}_i$ - הוא שווה להפרש של ערכי F_i בשתי נקודות על שפת הכדור, ששם F מתאפסת. לכן כאשר נסכום את האינטגרלים האלה נקבל מההגדרה

$$\int_{B_x} \operatorname{div}F = 0$$

2. אם $x \in \Gamma = \partial G$, נסובב את G סביב x, וגם את השדה הווקטורי F. אפשר להניח, אחרי הסיבוב, שהתחום G הוא תת גרף ביחס לכל קואורדינטה ξ_i. כלומר יש תיבות Q_i עם

$$G \cap Q_i = \left\{\xi \in Q_i \mid \xi_i < g_i\left(\hat{\xi}_i\right)\right\}$$
$$\Gamma \cap Q_i = \left\{\xi \in Q_i \mid \xi_i = g_i\left(\hat{\xi}_i\right)\right\}$$
$$\operatorname{supp}(F) \subseteq B_x \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$$

כעת, אנו דנים באינטגרל

$$\int\limits_{\partial G} \langle F, N \rangle \, \mathrm{d}S$$

מתקיים

$$\langle F, N \rangle = \sum_{i=1}^{n} F_i N_i$$

נחשב:

$$\int\limits_{\Gamma} F_i N_i \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\Gamma \cap B_x} F_i N_i = \int\limits_{\Gamma \cap Q_i} F_i N_i \, \mathrm{d}S$$

כעת, יש לנו את הפרמטריזציה הסטנדרטית של הגרף של g, ולפיה נקבל

$$N_i = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g_i|^2}}$$

ובסך הכל

$$\int\limits_{\Gamma} F_i N_i \, \mathrm{d}S = \int\limits_{\hat{Q}_i} F_i \left(\hat{\xi}_i, g_i \left(\hat{\xi}_i \right) \right) \, \mathrm{d}\hat{\xi}_i$$

כאשר

$$\hat{Q}_i = \left\{ \hat{\xi}_i \mid \xi \in Q \right\}$$

מהצד השני, יש לנו את סכום של האינטגרלים

$$\begin{aligned} \int\limits_{G} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} \, \mathrm{d}\xi = \int\limits_{G \cap B_x} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} \, \mathrm{d}\xi = \int\limits_{G \cap Q_i} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} \, \mathrm{d}\xi = \\ = \int\limits_{\hat{Q}_i} \int\limits_{a_i}^{g(\hat{\xi}_i)} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} \, \mathrm{d}\xi_i \, \mathrm{d}\hat{\xi}_i \end{aligned}$$

כאשר $a_i = \inf \left\{ \xi_i \mid \xi \in Q_i \right\}$. כעט, מניטון לייבני נקבל

$$\int\limits_{\hat{Q}_i} \int\limits_{a_i}^{g(\hat{\xi}_i)} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} \, \mathrm{d}\xi_i \, \mathrm{d}\hat{\xi}_i = \int\limits_{\hat{Q}_i} F_i \left(\hat{\xi}_i, g_i \left(\hat{\xi}_i \right) \right) \, \mathrm{d}\hat{\xi}_i$$

וזה שווה למה שקיבלנו קודם. על ידי סכימה של אלה מאחד עד n, נקבל את השוויון שמחפשים במשפט הדיברגנץ, ולכן סיימנו.

■