חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

© ארזים

17 במאי 2017

1 פונקציות הרמוניות

ראינו את תכונת הערך הממוצע לכל מימד שגודל ממש מאשר 2. במימד 2 השארנו לבית. ניתן רמז ־ פונקציית העזר היא

$$v(x)=\log\frac{|x|}{r}$$

משפט 1.1 (עקרון המקסימום) נניח כי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום. תהי u הרמונית בתחום G, ותהי $x_0\in G$ עבורה

$$u(x_0)=\max_G u$$

אזי u קבועה.

הוכחה: נגדיר

$$U=\left\{x\in G\mid u(x)=\max_G u\right\}$$

נשים לב שזו קבוצה פתוחה: מתכונת הערך הממוצע,

$$u(x)=\frac{1}{v_n(B)}\int\limits_B u(y)\ \mathrm{d}y$$

כאשר $B=B(x,r)$ המקיים $\overline{B}\subseteq G$. נקבל

$$u(x)=\frac{1}{v_n(B)}\int\limits_B u(y)\ \mathrm{d}x\le\frac{1}{v_n(B)}\int\limits_B u(x)\ \mathrm{d}y=u(x)$$

השתמשנו בכך שלכל $y\in B$ מתקיים $u(y)\le u(x)$. האינטגרלים השתוו, ולכן מרציפות u נקבל $u\mid_B=u(x)$. לכן $B\subseteq U$. כמו כן,

$$G\backslash U=\left\{x\in G\mid u(x)<\max_G u\right\}$$

u רציפה, ולכן $G\backslash U$ פתוחה (מוגדרת על ידי תנאי פתוח). קיבלנו כי $G=U\cup(G\backslash U)$, $x_0\in U$, אבל G קשירה, ולכן $G\backslash U$ ריקה. לכן סיימנו. ■

משפט 1.2 (משפט ליוביל) אם u פונקציה הרמונית על כל $\mathbb{R}^n$ וחסומה מלרע (או מלעל) אזי היא קבועה.

הוכחה: נניח כי $u\geq 0$. ניקח $x,y\in\mathbb{R}^n$, $r>0$. נגדיר

$$R=|x-y|+r$$

ואז

$$B(x,r)\subseteq B(y,R)$$

אזי

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{v_n r^n}\int\limits_{B(x,r)} u \leq \frac{1}{v_n r^n}\int\limits_{B(y,R)} u = \\ &= \left(\frac{R}{r}\right)^n \frac{1}{v_n R^n}\int\limits_{B(y,R)} u = \left(\frac{R}{r}\right)^n u(y) = \left(\frac{|x-y|+r}{r}\right)^n u(y) \end{aligned}$$

קיבלנו כי לכל $r>0$ מתקיים

$$u(x)\leq\left(1-\frac{|x-y|}{r}\right)^n u(y)$$

נשאיף את $r\to\infty$ ונקבל $u(x)\leq u(y)$. מסימטריה, $u(y)\leq u(x)$ ולכן $u(y)=u(x)$. ■

כעת נרצה לחזור ולהוכיח את משפט הדיברגנץ בכלליות המלאה שלו.

טענה 1.3 תהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית, ויהי $K\subseteq\bigcup_{i=1}^N U_i$ כיסוי פתוח של K. אזי קיים אוסף פונקציות חלקות $\varphi_1,\ldots,\varphi_N:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך שמתקיים:

1. $\mathrm{supp}\varphi_i\subseteq U_i$ לכל i.
2. $\varphi_i\geq 0$ לכל i.
3. $\sum_{i=1}^N\varphi_i=1$ על K.

הוכחה: יש לנו כיסוי פתוח של קומפקט. מהלמה של לבג קיים $\rho>0$ כך שלכל $x\in K$ קיים j שעבורו $B(x,2\rho)\subseteq U_j$. נכסה את $\mathbb{R}^n$ על ידי כדורים פתוחים B_j ברדיוס ρ (כמות בת מניה). נכתוב

$$B_j=B(X_j,\rho)$$
$$\mathbb{R}^n=\bigcup_{j=1}^\infty B_j$$

כאשר $x_j \to \infty$. נגדיר כעת פונקציות

$$f_j\left(x\right)=\begin{cases}\left(\rho^2-\left|x-x_j\right|^2\right)^2 & x\in B_j\\ 0 & x\notin B_j\end{cases}$$

f_j כולן חלקות C^1. B_j מכסות את $\mathbb{R}^n$, ולכן מתקיים

$$\sum_{j=1}^{\infty}f_j\left(x\right)>0$$

כמו כן, בגלל שמתקיים $x_j\to\infty$, לכל x רק מספר סופי של f_j אינן 0. לכן הטורסופי וחיובי בכל מקום. כעת נגדיר

$$g_j\left(x\right)=\frac{f_j\left(x\right)}{\sum_{i=1}^{\infty}f_i\left(x\right)}$$

ברור שמתקיים

$$\sum_{j=1}^{\infty}g_j=1$$

נסמן J את אוסף כל אותם j עבורם $B_j\cap K\neq\emptyset$. לכל $j\in J$ קיים $x\in K\cap B_j$. ואז

$$\overline{B}_j\subseteq B\left(x,2\rho\right)\subseteq U_i$$

עבור i מסויים. לכל j נבחר באופן שרירותי i כזה ונסמן אותו $i=\sigma\left(j\right)$. נגדיר

$$\varphi_i\left(x\right)=\sum_{j\in J,\sigma(j)=i}g_j\left(x\right)$$

■