חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ארזים ©

15 במאי 2017

1 משפט הדיברגנץ

ראינו בשיעור שעבר את אופרטור השטף החיצוני:

$$\text{outward Flux}_F\left(M\right)=\int\limits_M\left\langle F,N\right\rangle$$

כאשר N נורמל יחידה חיצוני. דיברנו על אופרטורים של תחומים ועל פונקציות צפיפות וניסחנו טענה:

טענה 1.1 אם F שדה ווקטורי חלק על קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^n$, אזי לכל $x\in U$ מתקיים

$$\text{div}F\left(x\right)=\lim_{Q\downarrow x}\frac{\text{outward Flux}_F\left(\partial Q\right)}{v\left(Q\right)}$$

מכאן ראינו את משפט הדיברגנץ (עוד לא הוכחנו כלום):

משפט 1.2 (משפט הדיברנץ) אם $U\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום חסום וחלק, F שדה ווקטורי חלק על $\overline{U}$, N נורמלי היחידה החיצוני של ∂U, אזי

$$\int\limits_{\partial U}\left\langle F,N\right\rangle\,\mathrm{d}S=\text{outward Flux}_F\left(\partial U\right)=\int\limits_U\text{div}F$$

נבדוק את משפט הדיברגנץ במקרה של קוביה. כלומר, U הוא קוביה. ניקח $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n$, ונגדיר

$$\hat{x}_i=\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\right)\in\mathbb{R}^{n-1}$$

תהי

$$Q=\prod_{i=1}^{n}\left(a_i,a_i+\varepsilon\right)$$

יש לה $2n$ פאות:

$$E_i^- = \left\{ x \mid x_i = a_i, \hat{x}_i \in \hat{Q}_i \right\}$$
$$E_i^+ = \left\{ x \mid x_i = a_i + \varepsilon, \hat{x}_i \in \hat{Q}_i \right\}$$

כאשר

$$\hat{Q}_i = \prod_{k \neq i} (a_k, a_k + \varepsilon)$$

כעת,

$$\langle F, N \rangle \mid_{E_i^+} = F_i \mid_{E_i^+}$$
$$\langle F, N \rangle \mid_{E_i^-} = -F_i \mid_{E_i^-}$$

כעת,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial Q} \langle F, N \rangle \, \mathrm{d}S &= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{E_i^+} \langle F, N \rangle \, \mathrm{d}S + \int\limits_{E_i^-} \langle F, N \rangle \, \mathrm{d}S = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\hat{Q}_i} \left(F_i \left(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i + \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n \right) - F_i \left(x_1, \dots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \dots, x_n \right) \right) \mathrm{d}\hat{x}_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\hat{Q}_i} \left(\int\limits_{a_i}^{a_i+\varepsilon} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \, \mathrm{d}x_i \right) \mathrm{d}\hat{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} (x) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{Q} \mathrm{div} F (x) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

למעשה, מה שעשינו כאן הוכיח לא רק את משפט הדיברגנץ עבור קוביה, אלא גם את הטענה שבאה לפניו. מדוע? נקבל

$$\frac{1}{v(Q)} \text{outward Flux}_F (\partial Q) = \frac{1}{v(Q)} \int\limits_{Q} \mathrm{div} F \xrightarrow{Q \downarrow x} \mathrm{div} F (x)$$

נשים לב שהוכחנו על קוביות, אבל האופרטור שלנו הוא אדיטיבי בתחום, ולכן נוכל לקרב המון תחומים בעזרת קוביות ולקבל עליהם את משפט הדיברגנץ.

2 נוסחאות גרין

הנוסחאות מתקבלות על ידי הצבות במשפט הדיברגנץ.

2.1 נוסחת גרין הראשונה

נגדיר נגזרת חיצונית של פונקציה $u:G\to\mathbb{R}$. ההגדרה היא

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\langle\nabla u,N\rangle$$

כאשר N נורמל היחידה החיצוני לתחום G. כמו כן, ניזכר בהגדרה של הלפלסיאן:

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\mathrm{div}\nabla u$$

ואז ניקח $F=\nabla u$, $\mathrm{div}F=\Delta u$, ואז

$$\int\limits_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=\int\limits_{G}\Delta u$$

2.2 נוסחת גרין השנייה

אם $u,v:G\to\mathbb{R}$ נקבל

$$\int\limits_{G}\langle\nabla u,\nabla v\rangle\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{G}u\Delta v\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\partial G}u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}S$$

וזאת על ידי לקיחת $F=u\nabla v$. ראינו (היה תרגיל) שמתקיים

$$\mathrm{div}\left(F\right)=\mathrm{div}\left(u\nabla v\right)=\langle\nabla u,\nabla v\rangle+u\Delta v$$

ואז

$$\langle F,N\rangle=\langle u\nabla v,N\rangle=u\,\langle\nabla v,N\rangle=u\frac{\partial v}{\partial n}$$

ואז הנוסחה נובעת ממשפט הדיברגנץ.
נוסחה שנובעת מכאן הוא כאשר מציבים $u=v$:

$$\int\limits_{G}\left|\nabla u\right|^2\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{G}u\Delta u\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\partial G}u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S$$

2.3 נוסחת גרין השלישית

על ידי חיסור הנוסחאות המתקבלות מנוסחת גרין השנייה עבור u,v ועבור v,u, נקבל

$$\int\limits_{G}\left(u\Delta v-v\Delta u\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{\partial G}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

3 פונקציות הרמוניות

הגדרה 3.1 פונקציה C^2 שמוגדרת על קבוצה פתוחה בתוך $\mathbb{R}^n$ תקרא הרמונית אם בכל נקודה $\Delta u = 0$ בכל נקודה.

נשים לב לעובדה מעניינת: אם $u(x,y)$ הרמונית אזי $f(x+iy) = u_x + iu_y$ היא פונקציה אנליטית - היא מקיימת את משוואות קושי רימן:

$$(u_x)_x = (-u_y)_y$$
$$(u_x)_y = -(-u_y)_x$$

טענה 3.2 נניח כי u הרמונית, ונניח כי היא מוגדרת בסביבה של $\overline{G}$, כאשר $G \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. אזי מתקיים:

1.
$$\int\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S = 0$$

2. אם $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ על ∂G אזי u פונקציה קבועה.

3. אם $u = 0$ על ∂G אזי $u \equiv 0$ זהותית.

הוכחה: עבור 1, זוהי הצבה ישירה בנוסחת גרין הראשונה.
עבור $2,3$, נכתוב את הנסוחה שנבעה מנוסחת גרין השניה:

$$\int\limits_G |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = -\int\limits_G \cancelto{0}{u\Delta u\,\mathrm{d}x} + \int\limits_{\partial G} \cancelto{0}{u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S}$$

האינטגרל הימני ביותר מתבטל בכל סעיף בגלל גורם אחר שאנחנו מניחים שהוא אפס. בשני המקרים, קיבלנו שהאינטגרל באגף שמאל מתאפס, אבל זה אינגרל של פונקציה רציפה, ועל כן הוא מתאפס אם ורק אם הפונקציה אפס זהותית. מכאן נקבל $\nabla u \equiv 0$, ולכן u קבועה. במקרה 3 היא חייבת להיות קבועה על 0 כי היא 0 על השפה. ■

משפט 3.3 (תכונת הערך הממוצע) יהי $B = B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ כדור פתוח, ותהי u פונקציה הרמונית שמוגדרת בסביבה של $\overline{B}$. אזי

$$u(x_0) = \frac{1}{v_{n-1}(\partial B)} \int\limits_{\partial B} u(x)\,\mathrm{d}S(x) =$$
$$= \frac{1}{v_n(B)} \int\limits_B u(x)\,\mathrm{d}x$$

הוכחה: נוכיח את המקרה $n>2$ - המקרה $n=2$ הוא מיוחד ונשאר כתרגיל.
נניח בלי הגבלת הכלליות כי $x_0=0$. ניקח

$$v(x)=\frac{1}{|x|^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}$$

זו פונקציה שסימטרית ביחס לראשית, והיא הרמונית - $\Delta v=0$ בתחום $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.
נרשום את נוסחת גרין השלישית עבור u,v בתום

$$G_\varepsilon=B\setminus\{|x|\le\varepsilon\}$$

נחשב את הגורמים:

$$\begin{aligned}\nabla v(x)&=-\frac{(n-2)\,x}{|x|^n}\\ N(x)&=\pm\frac{x}{|x|}\end{aligned}$$

בשפה החיצונית (ברדיוס r) הסימן הוא +, ובשפה הפנימית (ברדיוס ε) הסימן הוא -.
לכן נקבל

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\langle\nabla v,N\rangle=\begin{cases}-\frac{(n-2)}{|x|^{n-1}} & |x|=r\\ \frac{(n-2)}{|x|^{n-1}} & |x|=\varepsilon\end{cases}$$

כעת נכתוב את נוסחת גרין השלישית. נזכור שיש לתחום G_ε שתי שפות, פנימית וחיצונית, ולכן נפריד אינטגרלים על שפת G_ε לשני מחוברים בכל פעם. כמו כן נזכור כי v מתאפסת על השפה החיצונית ($|x|=r$).

$$\int\limits_{G_\varepsilon}\left(\cancelto{0}{u\Delta v}-\cancelto{0}{v\Delta u}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{\partial G_\varepsilon}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

$$0=-\frac{n-2}{r^{n-1}}\int\limits_{|x|=r}u\,\mathrm{d}S+\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{|x|=\varepsilon}u-\int\limits_{|x|=\varepsilon}v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S=$$

$$=-\frac{n-2}{r^{n-1}}\int\limits_{|x|=r}u\,\mathrm{d}S+\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{|x|=\varepsilon}u-\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}-\frac{1}{r^{n-2}}\right)\cancelto{0}{\int\limits_{|x|=\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S}$$

$$\frac{1}{r^{n-1}}\int\limits_{|x|=r}u\,\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{|x|=\varepsilon}u\,\mathrm{d}S$$

נסמן w_n את שטח ספירת היחידה ונחלק בו. נקבל

$$\frac{1}{w_n r^{n-1}} \int\limits_{|x|=r} u \,\mathrm{d}S = \frac{1}{w_n \varepsilon^{n-1}} \int\limits_{|x|=\varepsilon} u \,\mathrm{d}s$$

$$\frac{1}{v_{n-1}\left(\{|x|=r\}\right)} \int\limits_{|x|=r} u \,\mathrm{d}s = \frac{1}{v_{n-1}\left(\{|x|=\varepsilon\}\right)} \int\limits_{|x|=\varepsilon} u \,\mathrm{d}s$$

כאשר נשאיף $\varepsilon \to 0$ נקבל

$$u\left(0\right) = \frac{1}{v_{n-1}\left(\partial B\right)} \int\limits_{\partial B} u \,\mathrm{d}S$$

וזה אחד השוויונות שרצינו להראות. עבור השני:

$$v_{n-1}\left(\{|x|=\rho\}\right) u\left(0\right) = \int\limits_{|x|=\rho} u \,\mathrm{d}S$$

ואז מנוסחת קו־שטח

$$\int\limits_{B} u = \int\limits_{0}^{r} \int\limits_{|x|=\rho} u \,\mathrm{d}S \mathrm{d}\rho = \int\limits_{0}^{r} v_{n-1}\left(\{|x|=\rho\}\right) u\left(0\right) = v_n\left(B\right) u\left(0\right)$$

כמו שרצינו. $\blacksquare$