חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ארזים ©

10 במאי 2017

נמשיך את הדיון מהשיעור שעבר:

1 משפט הדיברגנץ

דוגמא הקבוצה $U = B(2) \setminus \partial B(1)$ אינה פתוחה חלקה.

תרגיל (קשה) אם U קשירה ופתוחה וכן ∂U יריעה חלקה ממימד $n-1$, אזי U פתוחה חלקה.

תרגיל (חשוב שנשתמש בו) תהי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה חלקה, ותהי $a \in \partial G$ כך שבנורמל היחידה החיצוני $N(a) = (N_1, \ldots, N_n)$ הקואורדינטה N_i אינה 0 (עבור i מסויים).
עבור $(x = x_1, \ldots, x_n)$ נסמן

$$\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

נסמן $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ את ההעתקה $x \mapsto \hat{x}_i$. אזי קיימת תיבה פתוחה $a \in Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ופונקציה חלקה $f : \pi_i(Q) \to \mathbb{R}$ המקיימת

$$\partial G \cap Q = \{x \in Q \mid x_i = f(\hat{x}_i)\}$$

וכן אחד מבין שני הבאים:

$$G \cap Q = \{x \in Q \mid x_i < f(\hat{x}_i)\}$$
$$G \cap Q = \{x \in Q \mid x_i > f(\hat{x}_i)\}$$

פתרון (רעיון) בלי הגבלת הכלליות, $i = n$. ∂G היא יריעה ממימד $n-1$, כלומר קיימת הצגה סתומה רגולרית $\phi : W \to \mathbb{R}$ המקיימת

$$(\partial G) \cap W = \phi^{-1}(0)$$

כאשר W סביבה של a. אזי אנחנו יודעים כי

$$N(a) = \pm \frac{\nabla \phi(a)}{|\nabla \phi(a)|}$$

נתון כי $N_n \neq 0$ ועל כן $\frac{\partial \phi}{\partial x_n}(a) \neq 0$. כעת רוצים להסתכל על השפה, על החלק שמעליה ועל החלק שמתחתיה - את ההמשך נשאיר כתרגיל לבית.

כעת, אם U תחום עם שפה "מספיק טובה", מגדירים עבור שדה ווקטורי F

$$\text{outward Flux}_F(\partial U) = \int\limits_{\partial U} (F, N)\ \mathrm{d}S$$

כאשר N הוא נורמל היחידה החיצוני של U. פונקציונאל זה הוא אדיטיבי במובן הבא: אם

$$U = \operatorname{int}\left(\overline{U_1} \cup \overline{U_2}\right)$$

אזי

$$\text{outward Flux}_F(\partial U) = \text{outward Flux}_F(\partial U_1) + \text{outward Flux}_F(\partial U_2)$$

דוגמאות לפונקציונאלים כאלה שאנחנו מכירים כבר:

1. $U \mapsto v_n(U)$.
2. אם $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, שנחשוב עליה כצפיפות, נגדיר

$$\mathcal{F}(U) = \int\limits_{U} \rho(x)\ \mathrm{d}x$$

וזה נותן מאסה. כאן, אם נסמן $Q \downarrow x$ קירוב של הסינגלטון x על ידי קוביות, אזי

$$\rho(x) = \lim_{Q \downarrow x} \frac{\mathcal{F}(Q)}{v_n(Q)}$$

יש לדוגמה האחרונה תכונה שנראית לנו נכונה - אם $\Omega_j \uparrow \Omega$ אז היינו מצפי שיתקיים $\mathcal{F}(\Omega_j) \xrightarrow{j \to \infty} \mathcal{F}(\Omega)$.

טענה 1.1 אם F שדה וקטורי חלק על קבוצה פתוחה U, אזי לכל $x \in U$ מתקיים

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{Q \downarrow x} \frac{\text{outward Flux}_F(\partial Q)}{v(Q)}$$

טענה זו תנבע מאיך שנוכיח את משפט הדיברגנץ:

משפט 1.2 (משפט הדיברגנץ) יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום וחלק. יהי F שדה וקטורי חלק על $\overline{U}$. נסמן בתור N את נורמל היחידה החיצוני של U. אזי

$$\int\limits_{\partial U} (F, N)\ \mathrm{d}S = \text{outward Flux}_F(\partial U) = \int\limits_{U} \operatorname{div} F$$