חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ⓒ ארזים

8 במאי 2017

1 נוסחת קו־שטח

משפט 1.1 יהי $V \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום, $\phi : V \to \mathbb{R}$ חלקה ורגולרית על V. נסמן $\phi(V) = (a,b)$. תהי $f : V \to \mathbb{R}$ עם תומך קומפקטי בתוך V. אזי

$$\int\limits_V f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{M_c} \frac{f(x)}{|\nabla \phi(x)|}\,\mathrm{d}S \right) \mathrm{d}c$$

כאשר

$$M_c = \phi^{-1}(c) \subseteq V$$

הוכחה: היינו באמצע. ראינו שתחת תנאי המשפט, לכל $p \in V$ קיים כדור $B(p,\delta_p) \subseteq V$ כך שהמשפט נכון בהנחה שמתקיים $\mathrm{supp}(f) \subseteq B(p,\delta_p)$.

כעת, נגדיר $K = \mathrm{supp} f \subseteq V$ וזה קומפקט. לכל $x \in K$ יש לנו כדור $B(x,\delta_x)$. נסתכל בכיסוי

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B\left(x, \frac{1}{2}\delta_x\right)$$

וניקח לא תת כיסוי סופי:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N B\left(x_i, \frac{1}{2}\delta_{x_i}\right)$$

קיים פריקו יחידה $\varphi_i : V \to \mathbb{R}$ כך שלכל i מתקיים $\mathrm{supp}\varphi_i \subseteq B(x,\delta_i)$ וכן

$$\sum_i \varphi_i = 1$$

על K, כאשר כל φ_i אינטגרבילית רימן. אזי

$$\sum_i f\varphi_i = f$$

נגדיר $f_i = f\varphi_i$. לפי מה שראינו בשיעור שעבר,

$$\int\limits_V f_i \,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{M_c} \frac{f_i}{|\nabla\phi|} \right) \mathrm{d}c$$

ועל ידי סכימת האינטגרלי הללו נסיים. ■

דוגמא $B = \{|x|<1\} \subseteq \mathbb{R}^n$, ואז לוקחים $r>0$ ומסמנים $rB = \{|x|<r\}$. תהי $f : rB \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן. אזי

$$\int\limits_{rB} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^r \mathrm{d}\rho \int\limits_{S_\rho} f(x)\,\mathrm{d}S = \int\limits_0^r \rho^{n-1} \int\limits_{S_1} f(\rho(x))\,\mathrm{d}S(x)$$

כאשר $S_\rho = \{|x| = \rho\}$,

$$\phi(x) = |x|$$

יש להסביר מדוע זה נכון ־ התומך לא קומפקטי. נסמן

$$A_\varepsilon = (r-\varepsilon)\,B \backslash \varepsilon B$$

זו טבעת קומפקטית. נגדיר $f_\varepsilon = f \cdot \mathbb{1}_{A_\varepsilon}$. כעת, f_ε בעלת תומך קומפקטי, $\phi : rB\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ רגולרית בכל נקודה וחלקה. מתקיימים תנאי המשפט ולכן

$$\int\limits_{rB} f_\varepsilon = \int\limits_{A_\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int\limits_{rB} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_0^r \rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho \int\limits_{S_1} f_\varepsilon(\rho x)\,\mathrm{d}S(x) = \int\limits_\varepsilon^{r-\varepsilon} \rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho \int\limits_{S_1} f(\rho x)\,\mathrm{d}S(x) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^r \rho^{n-1}\mathrm{d}\rho \int\limits_{S_1} f(\rho(x))\,\mathrm{d}S(x)$$

2 משפט הדיברגנץ (Divergence Theorem)

הגדרה 2.1 תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. שדה וקטורי חלק F על U הוא בחירה חלקה של וקטור משיק $F(x) \in T_x(U)$ לכל $x \in U$. יש זיהוי $T_xU \cong \mathbb{R}^n$, ואז אפשר לחשוב על F כעל העתקה $F : U \to \mathbb{R}^n$. החלקות של F היא כפונקציה כזו.

הגדרה 2.2 אם $A \subseteq \mathbb{R}^n$, שדה ווקטורי חלק F על A זאת בחירה חלקה של משיק $F(x) \in T_x\mathbb{R}^n$ לכל $x \in A$. אפשר להסתכל על F כהעתקה $F : A \to \mathbb{R}^n$, ואז חלקות של F משמעה שקיימת קבוצה פתוחה $A \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$ וקיימת הרחבה של F לפונקציה $\phi : W \to \mathbb{R}^n$ חלקה.

דוגמאות אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה אזי ∇f היא שדה וקטורי רציף.

שדה מהירויות של נוזל - יש לנו נוזל באיזשהו מיכל, ובכל נקודת זמן נסתכל על וקטור המהירות של כל חלקיק. זה שדה המהירויות של הנוזל. כלומר, $F(x,t)\in T_xU$ היא מהירות רגעית של חלקיק המים בנקודה x בזמן t. מתקיים

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)&=F(t,x(t))\\ x(t_0)&=x_0\end{aligned}$$

זו משוואה דיפרנציאלית.

שדות כח (גרוויטציוני, חשמלי).

הגדרה 2.3 יהי $M\subseteq\mathbb{R}^n$ על משטח חלק שנתון ביחד עם בחירה רציפה של נורמל יחידה של M:

$$(T_xM)^{\perp}\ni N(x)\in T_x\mathbb{R}^n$$

יהי F שדה וקטורי על M (מספיק שיהיה רציף). <u>השטף</u> של F דרך M זה

$$\mathrm{Flux}_F(M)=\int\limits_M (F,N)\,\mathrm{d}S$$

פירוש פיזיקלי - אם F הוא שדה מהירויות רגעי של זרימת מים בזמן t מסויים, השטף של F על M מודד נפח אינפיניטיסמלי של מים שעברו דרך המשטח M. בקטע $[t,t+\Delta t]$ עבר נפח $\mathrm{Flux}_F(M)\,\Delta t+o(\Delta t)$ של מים דרך M.

הגדרה 2.4 יהי F שדה ווקטורי חלק על $U\subseteq\mathbb{R}^n$. נסמן $F=(F_1,\dots,F_n)$. <u>הדיברגנץ</u> של F זו פונקציה $\mathrm{div}F:U\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$\mathrm{div}F=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial x_i}=\mathrm{Tr}(D_F)$$

הערה 2.5 הדיברנץ לא משתנה אחרי שינוי לינארי של קואורדינטות. אם F שדה וקטורי חלק, $P:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית הפיכה, נגדיר שדה וקטורי

$$G=P^{-1}FP$$

אזי

$$\mathrm{div}G(x)=\mathrm{tr}(D_G(x))=\mathrm{tr}\left(P^{-1}D_F(Px)P\right)=\mathrm{tr}(D_F(Px))=\mathrm{div}F(Px)$$

תרגיל יהי F שדה וקטורי חלק, ותהי h פונקציה חלקה. אזי

$$\mathrm{div}\left(hF\right)=h\mathrm{div}F+\left(\nabla h,F\right)$$
$$\mathrm{div}\left(\nabla h\right)=\triangle h\coloneqq\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^{2}h}{\partial x_{j}^{2}}$$

האופרטור $\triangle$ נקרא לפלסיאן.

הגדרה 2.6 קבוצה פתוחה $U\subseteq\mathbb{R}^{n}$ נקראת חלקה אם לכל $x\in\partial U$ קיימת סביבה W של x ודיפאומורפיזם $\phi:W\to\phi\left(W\right)$ כך שמקתיים

$$\phi\left(U\cap W\right)=\phi\left(W\right)\cap\left\{ x_{n}<0\right\}$$

נשים לב שבפרט במצב זה מתקיים

$$\phi\left(W\cap\partial U\right)=\phi\left(W\right)\cap\left\{ x_{n}=0\right\}$$

כלומר השפה של U היא יריעה חלקה ממימד $n-1$.

הגדרה 2.7 תהי $U\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קבוצה פתוחה חלקה. עבור $x\in\partial U$, נורמל יחידה $N\left(x\right)$ ליריעה ∂U בנקודה x נקרא נורמל יחידה חיצוני אם לכל $t>0$ מספיק קטן, $x+tN\left(x\right)\notin U$.

תרגיל נניח כי $U\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קבוצה פתוחה חלקה. אזי לכל $a\in\partial U$ קיים ויחיד נורמל יחידה חיצוני $N\left(a\right)$ והוא תלוי באופן רציף בנקודה a.

פתרון ניקח סביבה W של a כמו בהגדרת קבוצה פתוחה חלקה. יש

$$\phi:W\to\phi\left(W\right)$$

עם

$$\phi\left(W\cap U\right)=\phi\left(W\right)\cap\left\{ x_{n}<0\right\}$$

נגדיר פונקציה $F:W\to\mathbb{R}$ כך שעבור $x\in W$ $F\left(x\right)$ היא הקואורדינטה x_{n} של $\phi\left(x\right)$. כעת $\Sigma=W\cap\partial U=\left\{ F=0\right\}$. כמובן $\nabla F\neq0$ על W. נגדיר

$$N\left(x\right)=\frac{\nabla F\left(x\right)}{\left|\nabla F\left(x\right)\right|}$$

אזי $\left|N\left(x\right)\right|=1$, וכן $N\left(x\right)\perp T_{x}\Sigma$. נרצה להוכיח שהוא נורמל יחידה חיצוני. מתקיים

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=0}F\left(x+tN\left(x\right)\right)=\left(\nabla F\left(x\right),N\left(x\right)\right)=\left(\nabla F\left(x\right),\frac{\nabla F\left(x\right)}{\left|\nabla F\left(x\right)\right|}\right)=\left|\nabla F\left(x\right)\right|>0$$

לכן אם $t>0$ מספיק קטן נקבל $F(x+tN(x))>0$, כי $F(x)=0$. לכן $x+tN(x)\notin U$ ־ F זו הקואורדינטה x_n של ϕ, והיא חיובית, אבל $\phi(U\cap W)=\phi(W)\cap\{x_n<0\}$. מסיבה דומה, אם $t<0$ קרוב מספיק לאפס, $x+tN(x)\in U$. הוכחנו קיום ויחידות של נורמל יחידה חיצוני ־ וברור מהגדרתו שהוא תלוי באופן רציף בנקודה x.