חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

27 בדצמבר 2016

הגדרה 0.1 יהי $x \in [0,1)$. $\beta_k(x)$ היא הספרה k בפיתוח הבינארי של x:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k(x)}{2^k}$$

$\beta_k(x) \in \{0,1\}$לכל k,

תרגיל יהי x כך שמתקיים

$$\liminf_{n\to\infty} \beta_n(x) = 0$$

כלומר הספרה 0 מופיעה אינסוף פעמים. נתבונן בפונקציה

$$f : [0,1) \to [0,1)$$
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k}(x)}{2^k}$$

פתרון מבוחן M, הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k}}{2^k}$$

מתכנס במידה שווה. נראה כי β_n אינטגרבילית. היא קבועה בכל קטע שמתחיל בנקודה מהצורה $l = 0.\beta_1\beta_2\ldots\beta_n 00\ldots 0$, ועד $0.\beta_1\ldots\beta_n 11\ldots 1$, כלומר בקטע באורך

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

0 נקודה מהסוג הזה, ולכן β_n קבועה בקטעים מהצורה $[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n})$. לכן β_n פונקציית

מדרגות ולכן אינטגרבילית. בחצי מהקטעים היא 0, ובחצי השני היא 1. יהי A איחוד הקטעים שבהם $\beta_n = 1$, B איחוד הקטעים שבהם $\beta_n = 0$, ואז

$$\int\limits_{[0,1]} \beta_n = \int\limits_{A} \beta_n + \int\limits_{B} \beta_n = \mathrm{Vol}\,(A) \cdot 1 + \mathrm{Vol}\,(B) \cdot 0 = \frac{1}{2}$$

לכן נקבל

$$\int\limits_{[0,1]} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{[0,1]} \frac{\beta_{2k}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

תרגיל תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מדידה ז'ורדן, פתוחה ומנפח חיובי. תהי $f : A \to \mathbb{R}$ רציפה וחיובית ממש. אזי

$$\int\limits_{A} f > 0$$

פתרון $f\,(x) = M > 0$. תהא U תיבה סביב x בה $f\,(x) \geq \frac{M}{2}$. אז

$$\int\limits_{A} f \geq \int\limits_{U} f + \int\limits_{A \backslash U} f \geq \frac{M}{2} \cdot \mathrm{Vol}\,(U) + 0 > 0$$

תרגיל יהי $G \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום מדיד ז'ורדן (תחום - קבוצה פתוחה וקשירה). תהי $f : G \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי יש $x_0 \in G$ עבורה

$$\int\limits_{G} f = f\,(x_0) \cdot \mathrm{Vol}\,(G)$$

פתרון

$$\inf_G f \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(G)} \int\limits_{G} f \leq \sup_G f$$

אם אין שוויון באף צד, אז יש $x_1, x_2 \in G$ עם

$$f\,(x_1) > \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(G)} \int\limits_{G} f$$

$$f\,(x_2) < \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(G)} \int\limits_{G} f$$

ניקח מסילה בין x_1, x_2, γ, ונקבל את מה שרצינו ממשפט ערך הביניים החד מימדי על $f\circ\gamma$. לחילופין, $f\left(G\right)$ קשירה ולכן קטע, ולכן אם $f\left(G\right)\ni a<b\in f\left(G\right)$ אז גם $[a,b]\in f\left(G\right)$.
נניח כעת כי

$$\frac{1}{\operatorname{Vol}\left(G\right)}\int\limits_{G}f=\sup_{G}f$$

אם לפונקציה f יש נקודת מקסימום x_0, סיימנו. אם לא, $\sup f-f>0$ וכן

$$\int\limits_{G}\sup f-f=\sup f\cdot\operatorname{Vol}G-\int\limits_{G}f=0$$

וזו סתירה, כי מהתרגיל הקודם האינטגרל חייב להיות חיובי.

משפט 0.2 (חלש מפוביני) $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $B\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבות, $f:A\times B\to\mathbb{R}$ רציפה, ולכל $x\in A$ קיים האינטגרל

$$\int\limits_{B}f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y$$

אזי

$$\int\limits_{A\times B}f=\int\limits_{A}\left(\int\limits_{B}f\left(x,y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$$

דוגמא אם $f\left(x,y\right)=h_1\left(x\right)h_2\left(y\right)$:

$$\int\limits_{A\times B}f=\int\limits_{A}\left(\int\limits_{B}h_1\left(x\right)h_2\left(y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{A}h_1\left(x\right)\cdot\left(\int\limits_{B}h_2\left(y\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{B}h_2\left(y\right)\,\mathrm{d}y\cdot\int\limits_{A}h_1\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

תרגיל אם יש מלבן מקביל לצירים שניתן לחלק לכמות סופית של מלבנים שלכולם יש צלע באורך שלם וכולם מקבילים לצירים, אז גם למלבן הגדול יש צלע מאורך שלם.

פתרון נחשב מתי

$$\int\limits_{a}^{b}\sin\left(2\pi x\right)\,\mathrm{d}x=-\left(\cos 2\pi b-\cos 2\pi a\right)=0$$

זה קורה רק כאשר

$$\begin{cases} 2\pi b = 2\pi a + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi b = -2\pi a + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

או באופן שקול

$$\begin{cases} b - a = k & k \in \mathbb{Z} \\ b + a = k & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

לכן אם מלבן T מלבן שאחת מצלעותיו שלמה,

$$\int\limits_{T} \sin\left(2\pi x\right)\sin\left(2\pi y\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

כמו כן, אם $T = [a,b] \times [c,d]$, אזי

$$\int\limits_{T} \sin\left(2\pi x\right)\sin\left(2\pi y\right)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{a}^{b} \sin\left(2\pi x\right)\ \mathrm{d}x \cdot \int\limits_{c}^{d} \sin\left(2\pi y\right)\ \mathrm{d}y$$

קיבלנו שהאינטגרל על פני כל המלבן הוא 0, ושווה גם למכפלה (נניח שהצלעות הן a,b):

$$\int\limits_{0}^{a} \sin\left(2\pi x\right)\ \mathrm{d}x \cdot \int\limits_{0}^{b} \sin\left(2\pi y\right)\ \mathrm{d}y = 0$$

ולכן אחד מבין $a-0, a+0, b-0, b+0$ שלם, כלומר אחד מבין a,b שלם.