חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

20 בדצמבר 2016

1 מדידות

הגדרה 1.1 קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^n$ היא מנפח 0 אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימות תיבות (פתוחות או סגורות) $Q_1, \ldots, Q_m$ כך שמתקיים

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} Q_i$$

וכן

$$\sum_{i=1}^{m} \nu\left(Q_i\right) < \varepsilon$$

אם קיים כיסוי כזה שהוא בן מניה, E נקראת זניחה.

למשל, $\mathbb{Q}$ זניחה בתור $\mathbb{R}$, אבל לא מנפח 0.

1.1 קבוצת קנטור

נגדיר $K_1 = [0,1]$. K_n מתקבל על ידי הסרת השליש המרכזי מכל קטע של K_{n-1}. נסמן את קבוצת קנטור:

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

(בנייה הרבה יותר פורמלית וברורה אפשר למצוא בסיכום הרצאה 8 בפונקציות ממשיות, חורף 2016).

K סגור, והפנים שלו ריק. נסמן $U = [0,1] \setminus K$, ונטען כי $\partial U = K$. מכאן $\mathrm{Int}K = \emptyset$, שכן סביבה של כל נקודה מתוך K תחתוך את U.

יהי $x \in \partial U$. U פתוחה, כלומר $\partial U = \overline{U} \setminus U$, ואלו נקודות שאינן בתוך U ולכן הן בתוך K.

יהי $x \in K$. בפרט, $x \in K_n$, ולכן נמצא בקטע מאורך $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ שכולו בתוך K. לכן יש $y_n \notin K$ עם $|y_n - x| < \left(\frac{1}{3}\right)^n$, ולכן $y_n \to x$, כלומר $x \in \overline{U} \setminus U = \partial U$.

לבסוף, K מנפח 0, פשוט כי K_n מהווה כיסוי של K מאורך כולל $2^n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$.

כעת נדון בקבוצת קנטור המלאה: אותו רעיון, רק במקום להוציא דווקא שליש, מוציאים את החלק ε_n האמצעי של כל קטע. אזי

$$\nu\left(K_n\right)=\left(1-\varepsilon_n\right)\nu\left(K_{n-1}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\varepsilon_n\right)$$

אם $\nu\left(K_n\right)\to 0$, אזי K מנפח אפס, כמו קודם.

תרגיל

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\varepsilon_n\right)=0\iff\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i=\infty$$

פתרון נוכיח רק צד אחד. נניח שהטור מתבדר. לכל $x\in(0,1)$ מתקיים $e^{-x}>1-x$, ואז

$$e^{-\sum\varepsilon_i}=\prod e^{-\varepsilon_i}>\prod\left(1-\varepsilon_i\right)$$

אם הטור מתבדר, אז אגף שמאל שואף אל 0, ולכן גם המכפלה.

נבחר ε_n כך שהטור יתכנס, ועכשיו נגדיר $U=[0,1]\setminus K$. אזי $\partial U=K$ <u>אינה זניחה</u>, ולכן U פתוחה ולא מדידה ז'ורדן.

תרגיל $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ העתקה C^1 ונסמן $E=\{x\mid f(x)=0\}$. אם לכל $x\in E$ מתקיים $\nabla_x f\neq 0$ אזי E זניחה.

פתרון יהי $x\in E$. יש $1\leq i\leq n$ עבורו $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\neq 0$, ובלי הגבלת הכלליות $i=1$. אזי יש סביבה U_x של x כך שהקבוצה $U_x\cap E$ היא גרף של x_1 כפונקציה חלקה של $x_2,\ldots,x_n$. נבחר Q_x תיבה עם קודקודים רציונליים עבורה $x\in Q_x\subseteq U_x$. אזי $Q_x\cap E$ זניחה, וכן

$$E=\bigcup_{x\in E}\left(Q_x\cap E\right)$$

זהו איחוד בן מניה של קבוצות זניחות, ולכן זניח.

תרגיל תהי $f:U\to\mathbb{R}^n$ העתקה C^1, כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. אם $X\subseteq U$ זניחה אזי $f(x)$ זניחה.

פתרון נסמן $K:U\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $K(x)=||\nabla_x f||_{op}$. לכל $x\in U$ יש קוביה רציונאלית $x\in V_x$ בה $K\leq K_x$. לכן לכל $x,y\in V_x$ מתקיים

$$|f(x)-f(y)|\leq K_x|x-y|$$

נסמן עבור $y \in U$ $X_y = X \cap V_y$, ואז

$$f\left(X\right)=\bigcup_{y\in U}f\left(X\cap V_{y}\right)$$

$X \cap V_y$ זניחה, $f\mid_{V_y}$ ליפשיץ, ולכן $f\left(X \cap V_y\right)$ גם זניחה. לכן $f\left(X\right)$ היא איחוד בן מניה של זניחות, כלומר זניחה.