חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ארזים ©

13 בדצמבר 2016

1 כופלי לגראנז

ניזכר באי שוויון הממוצעים: ניקח $x_1,\ldots,x_n=0$ ונרצה להראות כי מתקיים

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$$

שני האגפים הומוגניים, אז על ידי ההצבה

$$y_i=\frac{x_i}{x_1+\cdots+x_n}$$

נקבל שמספיק להראות

$$\left(\frac{1}{n}\right)^n\geq x_1\cdots x_n$$

תחת האילוץ $x_1+\cdots+x_n=1$. פונקציית המטרה היא $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=x_1\cdots x_n$, והאילוץ הוא $g\left(x_1,\ldots,x_n\right)=x_1+\cdots+x_n-1$. מתקיים

$$\nabla f=\left(\frac{f}{x_i}\right)_i$$
$$\nabla g=\left(1,\ldots,1\right)$$

ממשפט כופלי לגראנז', בנקודת הקיצון מתקיים $\nabla f=\lambda\nabla g$, ולכן לכל i,j מתקיים $x_i=x_j$, כלומר $x_i=\frac{1}{n}$ לכל i. זו הנקודה החשודה היחידה.
בקבוצה $\{x\mid x_i\geq0,\sum x_i=1\}$, שהיא קומפקטית, יש לפונקציה f מקסימום, כי היא רציפה. נסמן $x_{\max}$ נקודת מקסימום כזו. אם יש לה קואורדינטה שמתאפסת אזי $f\left(x_{\max}\right)=0$, אבל $f\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)>0$, לכן המקסימום לא בשפה. לכן סיימנו.

2 אינטגרלים

דיון מאוד אבסטרקטי על אינטגרלים, המון ציורים ודברים כאלה. הסיכום הזה הולך להיות די פתטי.

נרצה לתת התאמה $\nu : S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, עבור קבוצת קבוצות כלשהי S, כך שמתקיים $A \subseteq B \Rightarrow \nu\left(A\right) \leq \nu\left(B\right)$ וכל מיני אקסיומות טובות אחרות. בלי הגבלת הכלליות נניח כי ν נותנת 1 לתיבת היחידה. אפשר גם לראות ששטח פנים של תיבות שמוכלות זו בזו מקיים אי שוויון דומה ונח, כאשר שטח פנים מוגדר באופן האינטואיטיבי על $\mathbb{R}^n$.

טענה 2.1 תהא B תיבה בתוך $\mathbb{R}^n$ ויהיו $f_n : B \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות. אם $f_n \xrightarrow{u} f$ אזי f אינטגרבילית וכן

$$\int\limits_B f_n \to \int\limits_B f$$

הוכחה: תהא P חלוקה של B. נחשב:

$$\left|S\left(f,P\right)-s\left(f,P\right)\right| \leq \left|S\left(f,P\right)-S\left(f_n,P\right)\right|+\left|s\left(f_n,P\right)-s\left(f,P\right)\right|+\left|S\left(f_n,P\right)-s\left(f_n,P\right)\right|$$

המחובר האחרון קטן, כי f_n אינטגרבילית לכל n. ■

הערה 2.2 התכנסות נקודתית לא מספיקה: נמנה את $\mathbb{Q}$, למשל $\{r_1, r_2, \dots\}$ ונגדיר

$$f_n\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x \in \{r_1, \dots, r_n\} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

כל אחת מאלה אינטגרבילית עם אינטגרל אפס, והגבול הנקודתי הוא פונקציית דיריכלה. מתקיים

$$\left|S\left(f,P\right)-S\left(f_n,P\right)\right| \leq \sum_{C \in P} \mathrm{vol}\left(C\right)\left|\sup_C f - \sup_C f_n\right| \leq \sum_{C \in P} \mathrm{vol}\left(C\right)\sup_C \left|f_n - f\right|$$

לכן עבור n גדול מספיק גם זה קטן, ובאותה צורה חוסמים גם את ההפרש בין הסכומים התחתונים. השוויון של האינטגרלים נובע כי

$$\left|\int\limits_B f - \int\limits_B f_n\right| = \left|\int\limits_B f - f_n\right| \leq \int\limits_B \left|f - f_n\right| \leq \varepsilon \int\limits_B 1 = \varepsilon \mathrm{vol}\left(B\right)$$

ולכן סיימנו.