חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

ⓒ ארזים

6 בדצמבר 2016

1 משפט הפונקציה ההפוכה

משפט 1.1 תהי $f:U\to\mathbb{R}^n$, עבור $U\subseteq\mathbb{R}^n$, העתקה C^1 עבורה d_xf לא מנוון. אזי f דפיאומורפיזם מקומי ליד x, כלומר קיימת $x\in V\subseteq U$ כך שהקבוצה $f\left(V\right)$ פתוחה וכן $f\mid_V\colon V\to f\left(V\right)$ דיפאומורפיזם.

דיפאומורפיזם הוא למעשה החלפת קואורדינטות.

תרגיל ניקח פולינום מתוקן $p\left(x\right)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$. נניל שיש לו n שורשים ממשיים שונים $x_1<x_2<\dots<x_n$. אזי יש סביבה U של $a=\left(a_1,\dots,a_n\right)$ כך שלכל פולינום עם מקדמים מתוך U (במובן הנכון, כמו p) יש n שורשים ממשיים וההעתקה $\left(a_1,\dots,a_n\right)\to\left(x_1,\dots,x_n\right)$ היא C^1.

פתרון נתבונן בהעתקה

$$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

$$g\left(x_1,\dots,x_n\right)=\left(-\sum_i x_i,\sum_{i<j}x_ix_j,-\sum_{i<j<k}x_ix_jx_k,\dots,\left(-1\right)^n x_1\dots x_n\right)$$

העתקה זו מעבירה מהשורשים של הפולינום למקדמים שלו (נוסחאות וייטה, או פשוט פתיחת סוגריים: $p\left(x\right)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\dots\left(x-x_n\right)$). נראה כי הדיפרנציאל שלה בנקודה $x=\left(x_1,\dots,x_n\right)$ אינו מנוון. נגזור:

$$d_xf=\begin{pmatrix}-1 & -1 & \dots & -1\\ x_2+x_3+\dots+x_n & x_1+x_3+\dots+x_n & \dots & x_1+\dots+x_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

אם $x_i=x_j$ עבור $i\neq j$ העמודות i,j זהות, ולכן הדטרמיננטה מתאפסת. הדטרמיננטה היא פולינום $h\left(x_1,\dots,x_n\right)$, ובגלל מה שכתבנו כבר, יש פולינום h_1 כך שמתקיים $h=\left(x_i-x_j\right)h_1$ (כי אם מציבים $x_i=x_j$ הפולינום מתאפס). לכן h מתחלק בפולינום $\left(x_i-x_j\right)$ לכל $i<j$. אבל h פולינום מדרגה $1+\dots+\left(n-1\right)=\frac{n(n-1)}{2}$, והוא גם מתחלק בפולינום $\prod_{i<j}\left(x_i-x_j\right)$, שלו יש את אותה דרגה. לכן

$$h=a\cdot\prod_{i<j}\left(x_i-x_j\right)$$

והיות והנחנו כי כל x_i שונים, אזי זה לא מתאפס, ולכן הדיפרנציאל אכן לא מנוון. מכאן, ממשפט הפונקציה ההפוכה נקבל את מה שרצינו.

2 כופלי לגראנז'

משפט 2.1 יהיו $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ונסמן

$$M = \{x \mid g_i(x) = 0 \forall i\}$$

ונניח כי $x \in M$ כך שהגרדיאנטים $\nabla_x g_1, \ldots \nabla_x g_m$ בלתי תלויים לינארית. תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. אם x קיצון של f בתוך M אז יש $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ כך שמתקיים

$$\nabla_x f = \sum_i \lambda_i \nabla_x g_i$$

תרגיל יהיו $a, b \in \mathbb{R}^n$ בלתי תלויים לינאריים עם $|a| = 5, |b| = 10$. נסמן

$$S = \{x \mid |x| = 1\}$$

נסמן $\varphi_a(x)$ להיות הזווית שבה x רואה $S_1(a) = \{y \mid |y - a| = 1\}$. הכוונה - לוקחים מישור שעובר דרך x, a, הוא נחתך עם $S_1(a)$ במעגל, ובמצב הזה מגדירים את הזווית בתור הזווית בין שני המשיקים למעגל שעוברים בנקודה x. באותה צורה נסמן $\varphi_b(x)$. הראו כי אם $x_0 \in S$ קיצור של $\varphi_a + \varphi_b$ אזי $x_0 \in \operatorname{span}\{a, b\}$.

פתרון ראשית,

$$\sin\left(\frac{1}{2}\varphi_a(x)\right) = \frac{1}{|x - a|}$$

ישירות מהגדרת סינוס במשולש ישר זווית (תציירו את המעגל, אני מוגבל כאן). נקח גרדיאנט:

$$\nabla \frac{1}{|x - a|} = -\frac{x - a}{|x - a|}$$

ואז נוכל לחשב ולהיווכח כי

$$\nabla_x \left(\sin\left(\frac{1}{2}\varphi_a x\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\varphi_a(x)\right)\nabla_x \varphi_a = -\frac{x - a}{|x - a|}$$

אפשר לחשב שוב ולקבל

$$\cos\left(\frac{1}{2}\varphi_a(x)\right) = \frac{\sqrt{|x - a|^2 - 1}}{|x - a|}$$

ולכן

$$\nabla_x \varphi_a - 2 \cdot \frac{x-a}{|x-a|^2 \sqrt{|x-a|^2 - 1}}$$

האילוץ הוא $g(x) = |x|^2 - 1$, ואז $\nabla g = 2x$. אז אם x_0 נקודת קיצון של $\varphi_a + \varphi_b$ בתוך S, אז מתקיים, ממשפט כופלי לגראנז',

$$\nabla_{x_0} \varphi_a + \nabla_{x_0} \varphi_b = 2\lambda x_0$$

נוכיח שזה נותן תלות לינארית לא טריוויאלית בין a, b, x_0. אם המקדם של x_0 יתאפס אז בהכרח המקדמים של a, b בהכרח לא מתאפסים, ואז נקבל תלות לינארית בין a, b שאינה טריוויאלית וזו סתירה. לכן סיימנו.