חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

29 בנובמבר 2016

1 משפט הפונקציה הסתומה

יהיו $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$, $n \geq m$, ותהי $f : U \to V$. בהינתן $y \in V$, אנחנו חוקרים את

$$f^{-1}(y) = \{x \in U \mid f(x) = y\}$$

"סיב" זה הוא $n-m$ מימדי.

כעת, אם x נקודה רגולרית, כלומר $D_x f$ מדרגה מלאה, אזי יש קואורדינטות שנקבעות ביחידות לפי הקואורדינטות האחרון (באופן מקומי). אלה שנקבעות הן אלה שהן העמודות של המינור ההפיך בדיפרנציאל.

משפט 1.1 תהי $f : \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \ldots, x_{n-m}, y_1, \ldots, y_m)$. נניח כי $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ הפיכה בנקודה (x, y), עבורה $f(x, y) = c$. אזי יש סביבה U של x וסביבה V של y, כמו גם העתקה C^k (אותו k שעבורו f היא C^k) $g : U \to V$ עבורה מתקיים

$$f^{-1}(c) \cap (U \times V) = \{(x, g(x)) \mid x \in U\}$$

ואפשר לחשב את $D_x g$ - הוא נתון על ידי $-M^{-1}D$, כאשר M הוא המינור הלא מנוון של הדיפרנציאל, D הוא "שאר הדיפרנציאל". בניסוח המשפט:

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}$$

תרגיל הוכיחו כי המערכת

$$\begin{aligned} x + yz - z^3 - 1 &= 0 \\ x^3 - xz + y^3 &= 0 \end{aligned}$$

מגדירה את x, y כפונקציה של z ליד $(1, -1, 0)$. מהו $\frac{\partial x}{\partial z}(0), \frac{\partial y}{\partial z}(0)$?

פתרון $(1,-1,0)$ פותר את המערכת. נגדיר

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ f(x,y,z) &= \left(x+yz-z^3-1, x^3-xz+y^3\right) \end{aligned}$$

הפתרונות למערכת הם בדיוק $f^{-1}(0)$. נחשב:

$$Df=\begin{pmatrix} 1 & z & y-3z^2 \\ 3x^2-z & 3y^2 & -x \end{pmatrix}$$

נציב עבור $(1,-1,0)$ונקבל

$$Df=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

המינור 2×2 השמאלי הוא הפיך, ולכן אכן x,y פונקציות של z, ממשפט הפונקציה הסתומה. מתקיים

$$M^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ואז מתקיים

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z}(0) \\ \frac{\partial y}{\partial z}(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

משפט 1.2 1. תהי A_0 מטריצה סימטרית ויהי λ_0 ערך עצמי פשוט של A (כלומר מריבוי 1). יהי u_0 ווקטור עצמי של λ_0 מנורמה 1. אזי יש סביבה U של A_0, כך שלכל $A\in U$ יש ערך עצמי פשוט λ ווקטור עצמי מתאים u מנורמה 1, כך שיש קשר C^1 בין u,λ לבין A.

2. אם $A(t)$ מסילה חלקה של מטריצות כך שמתקיים $A(0)=A_0$, וניקח את $\lambda(t), u(t)$ המובטחים לנו מסעיף 1, אזי מתקיים

$$\dot{\lambda}(0)=u_0^T\dot{A}(0)u_0$$

הוכחה: נגדיר

$$\begin{aligned} F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times M_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \\ F(\lambda,u,A) &= \left((\lambda I-A)u, ||u||^2-1\right) \end{aligned}$$

כעת מתקיים

$$F\left(\lambda_0, u_0, A_0\right) = 0$$

אנחנו מעוניינים כמובן בסיב $F^{-1}(0)$. נחשב את הדיפרנציאל:

$$D_{(\lambda_0,u_0,A_0)}F = \begin{pmatrix} u_0 & \lambda_0 I - A_0 & * \\ 0 & 2u_0 & 0 \end{pmatrix}$$

נניח כי

$$a_0 c_1 + \cdots + a_n c_n = 0$$

כאשר c_i הן עמודות הדיפרנציאל DF. אזי נובע כי

$$\begin{aligned} a_0 u_0 + \left(\lambda_0 I - A_0\right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} &= 0 \\ \left\langle 2u_0, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

נסמן $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. אזי

$$\begin{aligned} a_0 u_0 + \left(\lambda_0 I - A_0\right) v &= 0 \\ \left\langle u_0, v \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

נוכל לכתוב

$$\begin{aligned} a_0 \left(\lambda_0 I - A_0\right) u_0 + \left(\lambda_0 I - A_0\right)^2 v &= 0 \\ \left(\lambda_0 I - A_0\right)^2 v &= 0 \end{aligned}$$

לכן $v \in \ker\left(\lambda_0 I - A_0\right)^2$. נסמן $\lambda_0 I - A_0 = B_0$. $v, u \in \ker B_0^2$, אבל גרעין זה חד מימדי (כי $\ker B_0$ חד מימדי, כי הריבוי של λ_0 הוא 1). אבל, מהמשוואה השנייה, $u_0 \perp v$, ולכן נובע בהכרח $v = 0$. נובע מכאן גם $a_0 = 0$, ולכן יש לנו מינור הפיך $n+1 \times n+1$. בסביבת A_0, נובע כי λ, u הן פונקציות C^1 של A. מתקיים

$$\left(\lambda(t) I - A(t)\right) u(t) = 0$$

נגזור לפי t ונקבל

$$\dot{\lambda}(0)\,u_0+\lambda_0\dot{u}(0)-\dot{A}(0)\,u(0)-A(0)\,\dot{u}(0)=0 \tag{1}$$

כמו כן,

$$\langle u(t)\,,u(t)\rangle=1$$

נגזור ונקבל

$$2\,\langle\dot{u}(0)\,,u(0)\rangle=0$$

נכפיל סקלרית את המשוואה (1) בווקטור u_0.

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}(0)-\left\langle\dot{A}(0)\,u_0,u_0\right\rangle-\langle A_0\dot{u}(0)\,,u_0\rangle &= 0\\
\dot{\lambda}(0)-\left\langle\dot{A}(0)\,u_0,u_0\right\rangle-\langle\dot{u}(0)\,,A_0u_0\rangle &= 0\\
\dot{\lambda}(0)-\left\langle\dot{A}(0)\,u_0,u_0\right\rangle-\lambda\,\langle\dot{u}(0)\,,u_0\rangle &= 0\\
\dot{\lambda}(0) &= \left\langle\dot{A}(0)\,u_0,u_0\right\rangle
\end{aligned}$$

■