חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

22 בנובמבר 2016

1 משמעות גיאומטרית של דיפרנציאל

נניח כי $f\in C^{1}\left(U,V\right)$ כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^{n}$ פתוחה וכן $V\subseteq\mathbb{R}^{m}$ פתוחה. נגדיר מסילה $\gamma\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to U$ כך שמתקיים $\gamma\left(0\right)=x$ וכן $\dot{\gamma}\left(0\right)=v$. אזי נגדיר

$$\begin{aligned} d_{x}f:\mathbb{R}^{n} & \to & \mathbb{R}^{m}\\ d_{x}f\left(v\right) & = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=0}f\left(\gamma\left(t\right)\right) \end{aligned}$$

כאשר כאן, $\mathbb{R}^{n}$ הוא למעשה וקטורים שמתחילים בנקודה x, $\mathbb{R}^{m}$ בהתאם הוא וקטורים שמתחילים בנקודה $f\left(x\right)$.

1.1 שימושים

1.1.1 גזירה נוחה יותר

נניח ניקח העתקה $F:GL\left(n,\mathbb{R}\right)\to GL\left(n,\mathbb{R}\right)$ שהיא $F\left(A\right)=A^{-1}$. כמובן מתקיים $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\mathrm{Adj}A$. נחשב את הדיפקנציאל בנקודה A.

ניקח מסילה A_{s} עם $A_{0}=A$, $\dot{A}\left(0\right)=B$. אזי

$$d_{A}F\left(B\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mid_{s=0}\left(A_{s}\right)^{-1}$$

מתקיים $A_{s}^{-1}\cdot A_{s}=\mathrm{Id}$. נגזור לפי s ונקבל

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A_{s}^{-1}\right)\cdot A_{s}+\left(A_{s}^{-1}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}A_{s}=0$$

נציב כעת $s=0$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mid_{s=0}A_{s}^{-1}\right)A+A^{-1}B & = & 0\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mid_{s=0}A_{s}^{-1} & =- & A^{-1}BA^{-1} \end{aligned}$$

1.1.2 נקודות קריטיות

הגדרה 1.1 תהי $f:U\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות ($U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה). $x\in U$ נקראת קריטית אם $\nabla_x f=0$.

דוגמא x מינימום מקומי. אזי לכל מסילה γעם $\gamma(0)=x$, $f(\gamma(t))$ בעלת מינימום מקומי בנקודה 0, ולכן

$$\langle\nabla_x f,\dot{\gamma}(0)\rangle=d_x f(\dot{\gamma}(0))=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}f(\gamma(t))=0$$

כלומר

$$\nabla_x f=0$$

זה שהגרדיאנט יתאפס לא מספיק. אם הגרדיאנט מתאפס בנקודה x, נגדיר את המטריצה

$$H=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,j}(x)$$

ההסיאן של f בנקודה x. אם H הפיכה, אזי x נקודה קריטית לא מנוונת. אם כל הערכים העצמיים של H שליליים, x נקודת מקסימום, ואם כל הערכים העצמיים חיוביים, x היא מינימום. אחרת - x נקודת אוכף.

2 משפט הפונקציה הסתומה

עבור $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות. כאשר $f(x)=c$, ונניח כי $d_x f$ הוא מדרגה מלאה. אזי ליד x, הסיב $f^{-1}(c)$ הוא ממימד $n-m$, כלומר יש m קואורדינטות שהן פונקציות של השאר (כמובן $n>m$).

אם המינור ההפיך של הדיפרנציאל הוא בעל העמודות $\frac{\partial F}{\partial x_{i_1}},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_{i_m}}$ - אזי קואורדינטות אלו הן פונקציות C^1 של השאר.