חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

15 בנובמבר 2016

1 דיפרנציאביליות

הגדרה 1.1 תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, ותהי $F:U\to\mathbb{R}^m$ פונקציה. F דיפרנציאבילית בנקודה $x\in U$ אם קיימת העתקה לינארית $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, שנקראת הדיפרנציאל של F בנקודה x, אם מתקיים

$$F\left(x+h\right)-F\left(x\right)=hA\left(x\right)+o\left(|h|\right)$$

תרגיל תהי F דיפרנציאבילית בנקודה 0, ונניח כי

$$c=||d_0F||\leq 1$$

אזי קיים כדור B סביב 0 עבורו $F\left(B\right)\subseteq B$.

פתרון

$$||F\left(h\right)||=||d_0F\left(h\right)+o\left(||h||\right)||\leq||d_0F\left(h\right)||+o\left(||h||\right)\leq c\cdot||h||+o\left(||h||\right)$$

לכן

$$\frac{||F\left(h\right)||}{||h||}\leq c+\frac{o\left(||h||\right)}{||h||}$$

ניקח $h<r$, עבור r קטן מספיק, ונקבל

$$\frac{||F\left(h\right)||}{||h||}\leq c+\left(1-\frac{c}{2}\right)<1$$

נצטמצם למקרה $m=1$. $f:U\to\mathbb{R}$, ונקח $x\in U$. נתבונן בהעתקה $d_xf:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. מהלמה של ריס יש ווקטור $\nabla_xf\in\mathbb{R}^n$ כך שלכל $u\in\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$d_xf\left(u\right)=\langle u,\nabla_xf\rangle$$

חישוב נניח $||u||=1$, מה שלא משנה כי העניין הוא הכיוון.

$$|d_x f(u)| = |\langle u, \nabla x f\rangle| \leq ||u||\,||\nabla_x f|| = ||\nabla_x f||$$

שוויון מושג אם ורק אם הווקטורים פרופורציוניים (תלויים לינארית), ולכן $d_x f(u)$ מקסימלי בערכו המוחלט בכיוון $\nabla_x f$.

תרגיל תהי $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות, ותהא $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ מסילה גזירה כך שלכל t מתקיים $f(\gamma(t)) = c$, וכן $\gamma(0) = p \in U$. אזי

$$\langle \gamma'(0), \nabla_p f\rangle$$

פתרון נגזור את הנתון בנקודה $t=0$.

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= c \\ \langle \nabla_p f, \gamma'(0)\rangle &= 0 \end{aligned}$$

תרגיל תהי U פתוחה קשירה, ותהי $f : U \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות עם $\nabla f = 0$ על U. אזי f קבועה.

פתרון ממשפט לגראנז', אם U קמורה, ניקח $x, y \in U$

$$f(y) - f(x) = d_c f(y-x) = \langle \nabla_c f, y-x\rangle = 0$$

כעת, אם U לא קמורה, היא פתוחה, ולכן לכל נקודה יש סביבה כדור פתוח. כדור זה הוא קמור, ולכן f קבועה מקומית. כאן נסיים, מהלמה הבאה שננסח.

למה 1.2 תהי A קשירה ונניח כי $f : A \to \mathbb{R}$ רציפה וקבועה מקומית. אזי f קבועה.

הוכחה: יהי $x_0 \in A$, ונסמן $f(x_0) = c$. נגדיר

$$\begin{aligned} U &= \{x \mid f(x) \neq c\} \\ V &= \{x \mid f(x) = c\} \end{aligned}$$

מתקיים $U = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{c\})$, ולכן היא פתוחה, כלומר מהצורה $U' \cap A$, עבור U' פתוחה בתוך $\mathbb{R}^n$. לכל $x \in V$ יש סביבה V_x פתוחה, כך שמתקיים $V_x \cap A \subseteq V$. לכן

$$V = A \cap \left(\bigcup_{x \in V} V_x \right)$$

לפי תרגיל בית, אחת מבין U, V ריקה, אבל $x_0 \in V$, ולכן $U = \emptyset$, כלומר f קבועה. ■