חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

17 בינואר 2017

הסתכלנו בקואורדינטות ספריות בעבר:

$$p:(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)\to\mathbb{R}^3$$
$$p(r,\varphi,\theta)=(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$$

הדטרמיננט של הדיפרנציאל, לשם החלפת המשתנים הוא $r^2\sin\theta$.

הגדרה 0.1 בהינתן $E\subseteq\mathbb{R}^n$ מדידה ז'ורדן, מרכז המסה הוא

$$m_E=\frac{1}{\mathrm{Vol}(E)}\left(\int\limits_E x_1,\ldots,\int\limits_E x_n\right)$$

תרגיל חשבו את מרכז המסה של

$$E=\left\{a^2\le x^2+y^2+z^2\le b^2,z\ge 0\right\}$$

פתרון ראשית נחשב את הנפח:

$$\mathrm{Vol}(E)=\frac{\mathrm{Vol}(B(0,b))-\mathrm{Vol}(B(0,a))}{2}=\frac{2\pi\left(b^3-a^3\right)}{3}$$

כעת,

$$\int\limits_E z=\int\limits_{\substack{B(0,b)\\z\ge 0}}z-\int\limits_{\substack{B(0,b)\\z\ge 0}}z$$

נחשב:

$$\int\limits_{\substack{B(0,b)\\z\geq 0}} z = \int\limits_{\substack{0\leq r\leq b\\0\leq\varphi\leq 2\pi\\0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}}} r\cos\theta r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 2\pi\int\limits_0^b r^3\,\mathrm{d}r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{\pi}{4}b^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2\theta\right)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}b^4\int\limits_0^{\pi}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{4}b^4$$

ולכן

$$\int\limits_E z = \frac{\pi}{4}\left(b^4-a^4\right)$$

כעת, אם נתבונן בהעתקה $(x,y,z)\to(-x,y,z)$, המקיימת

$$E_1 = \{(x,y,z)\in E\mid x\geq 0\}\to\{(x,y,z)\in\mid x\leq 0\} = E_2$$

מתקיים

$$\int\limits_E x = \int\limits_{E_1} x + \int\limits_{E_2} x = 0$$

אותו דבר תקף לגבי y. לכן

$$m_E = \left(0,0,\frac{3}{8}\frac{b^4-a^4}{b^3-a^3}\right)$$

הגדרה 0.2 תהי $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$. Ω בעלת מיצוי ז'ורדן אם יש $\ldots\subseteq\Omega_2\subseteq\Omega_1$ כך שלכל i מתקיים $\Omega_i\in\mathcal{J}$ וכן

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\Omega$$

תהי $f:\Omega\to\mathbb{R}$ עם כמות זניחה של נקודות אי רציפות (כלומר, הצמצום שלה על כל קבוצה מדידה ז'ורדן אינטגרבילי). אם

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_{\Omega_i} f = \int\limits_{\Omega} f$$

קיים ולא תלוי במיצוי, אזי הוא האינטגרל הלא אמיתי של f.

ראינו בכיתה ־ אם פונקציה היא אי שלילית, אזי הגבול תמיד לא תלוי במיוי, אבל יכול להיות ∞.

תרגיל בדקו האם

$$\int\limits_{B(0,1)} \log\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

מתכנס.

פתרון נמצה:

$$\Omega_k = \left\{(x,y) \mid \frac{1}{k} \leq (x,y) \leq 1\right\}$$

ואז

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_k} \log\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\pi\int\limits_{\frac{1}{k}}^{1} r\log\left(r^2\right)\,\mathrm{d}r = 4\pi\int\limits_{\frac{1}{k}}^{1} r\log r\,\mathrm{d}r = \\ &= 4\pi\int\limits_{\frac{1}{k}}^{1}\left(\left(\frac{r^2}{2}\log r\right)' - \frac{r}{2}\right)\mathrm{d}r = \\ &= 2\pi\left(r^2\log r\right)|_{\frac{1}{k}}^{1} - 2\pi\int\limits_{\frac{1}{k}}^{1} r\,\mathrm{d}r = \\ &= 2\pi\frac{\log k}{k^2} - \pi\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \to -\pi\end{aligned}$$

הגדרה 0.3

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

בשיעורי הבית נראה שאם $p,q>0$ מתקיים

$$\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

משפט 0.4 תהי $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, אי שלילית, עם B_φ (קבוצת נקודות אי רציפות) זניחה. יהיו $p_1, \ldots, p_n > 0$. אזי

$$\int\limits_{\substack{x_1,\ldots,x_n \geq 0 \\ x_1+\cdots+x_n \leq 1}} \varphi\left(x_1 + \cdots + x_n\right) x_1^{p_1-1} \cdots x_n^{p_n-1} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \frac{\Gamma\left(p_1\right) \cdots \Gamma\left(p_n\right)}{\Gamma\left(p_1 + \cdots + p_n\right)} \int\limits_0^1 \varphi\left(u\right) u^{p_1+\cdots+p_n-1} \,\mathrm{d}u$$

הוכחה: המקרה הכללי בתרגול הבא. כעת נוכיח עבור $n = 2$. נבחר החלפת משתנים

$$\begin{pmatrix} x + y = u \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{v} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x = u\left(1-v\right) \\ y = uv \end{pmatrix}$$

נגזור:

$$\left|\begin{pmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{pmatrix}\right| = u \neq 0$$

ומתקיים

$$\{x, y > 0, x + y < 1\} \leftrightarrow \{0 < u, v < 1\}$$

כעת,

$$\int\limits_{\substack{x_1,x_2>0 \\ x_1+x_2<1}} \varphi\left(x_1 + x_2\right) x_1^{p-1} x_2^{q-1} \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int\limits_{[0,1]^2} \varphi\left(u\right) u^{p-1} \left(1-v\right)^{p-1} u^{q-1} v^{q-1} u \,\mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

$$= \int\limits_0^1 v^{q-1} \left(1-v\right)^{p-1} \,\mathrm{d}v \int\limits_0^1 \varphi\left(u\right) u^{p+q-1} \,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(q\right)}{\Gamma\left(p+q\right)} \int\limits_0^1 \varphi\left(u\right) u^{p+q-1} \,\mathrm{d}u$$

■

תרגיל חשבו את נפח הגוף D, שמוכל בכדור $\left\{x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$, ונמצא מעל החרוט $\left\{z = \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

פתרון נוכל לתרגם את התנאים להיות

$$r\cos\theta \geq \sqrt{r^2 \sin^2\theta} = r\sin\theta$$

$$\cos\theta \geq \sin\theta \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$r \leq \cos\theta$$

ולכן נקבל

$$\operatorname{Vol}(D)=\int\limits_{\substack{0\le\varphi\le2\pi\\0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\\r\le\cos\theta}} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^{\cos\theta} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta r^3\ |_0^{\cos\theta}=\frac{2\pi}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\cdots=\frac{\pi}{8}$$