<u>חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3</u>

ⓒ ארזים

10 בינואר 2017

תרגיל חשבו את

$$I=\int\limits_{[0,1]^n}\max\left(x_1,\ldots,x_n\right)\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n$$

פתרון לכל $\sigma\in S_n$ נגדיר

$$E_\sigma=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_{\sigma(1)}\le\cdots\le x_{\sigma(n)}\right\}\cap[0,1]^n$$

כעת, מתרגיל בית, אם יש לנו קבוצות $A_1,\ldots,A_n$ שהחיתוכים ביניהן ממידה 0, נקבל

$$\int\limits_{A_1\cup\cdots\cup A_n}f=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{A_i}f$$

נשים לב שאם $\sigma_1\neq\sigma_2$ אזי

$$E_{\sigma_1}\cap E_{\sigma_2}\subseteq\left\{x\mid x_{\sigma_1(n)}=x_{\sigma_2(n)}\right\}$$

ואגף ימין זניח. כעת, נשים לב שעל ידי שיקופים (העתקות לינאריות מדטרמיננטה -1) נוכל לעבור בין σ_1,σ_2, ולכן האינטגרל

$$\int\limits_{E_\sigma}x_{\sigma(n)}$$

אינו תלוי בתמורה σ. נקבל

$$I=\sum_{\sigma\in S_n}\int\limits_{E_\sigma}x_{\sigma(n)}=n!\cdot\int\limits_{E_{id}}x_n$$

לכן נותר לחשב עבור $\sigma=id$.
נותר לחשב:

$$I_1=\int\limits_{0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le1}x_n\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n$$

כעת, מתקיים

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \int_0^{x_n} \int_0^{x_{n-1}} \dots \int_0^{x_2} x_n \,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n = \\
&= \int_0^1 \int_0^{x_n} \dots \int_0^{x_3} x_2 x_n \,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n = \\
&= \dots = \int_0^1 x_n \frac{x_n^{n-1}}{(n-1)!} \,\mathrm{d}x_n = \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 x_n^n \,\mathrm{d}x_n = \frac{1}{(n-1)!\,(n+1)}
\end{aligned}$$

כעת נקבל

$$I = n! I_1 = \frac{n}{n+1}$$

0.1 משפט החלפת משתנים

משפט 0.1 יהיו U, V תחומים מדידים ז'ורדן, ויהי $\psi : U \to V$ דיפאומורפיזם עם דיפרנציאל חסום. תהי $f : U \to \mathbb{R}$. אזי f אינטגרבילית אם ורק אם $f \circ \psi$ אינטגרבילית, ובמקרה זה

$$\int_V f \circ \psi \, |D\psi| = \int_U f$$

שימושים נפוצים: ראשית נדון בקואורדינטות פולריות.

$$\begin{aligned}
p : (0, \infty) \times (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \\
(r, \theta) &\to (r\cos\theta, r\sin\theta)
\end{aligned}$$

הדיפרנציאל:

$$\left| \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & -r\cos\theta \end{pmatrix} \right| = r$$

כותבים $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

תרגיל תהי $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ חלקה, ויהי $0<\varepsilon<0.5$ כך שלכל (x,y,z) מתקיים

$$|z|^{1-\varepsilon}|u|\le\left(x^2+y^2\right)^{0.5-\varepsilon}$$

הראו כי

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}|u|=O\left(R^3\right)$$

כאשר $R\to\infty$.

פתרון

$$\int\limits_{x^2+y^2\le R^2-z^2}\frac{\left(x^2+y^2\right)^{0.5-\varepsilon}}{|z|^{1-\varepsilon}}=\int\limits_{-R}^{R}\frac{1}{|z|^{1-\varepsilon}}\int\limits_{x^2+y^2\le R^2-z^2}\left(x^2+y^2\right)^{0.5-\varepsilon}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$=\int\limits_{-R}^{R}\frac{1}{|z|^{1-\varepsilon}}\int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-z^2}}r^{2-2\varepsilon}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{3-2\varepsilon}\int\limits_{-R}^{R}\frac{r^{3-2\varepsilon}}{|z|^{1-\varepsilon}}\,|_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\,\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{2\pi}{3-2\varepsilon}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\left(R^2-z^2\right)^{\frac{3-2\varepsilon}{2}}}{|z|^{1-\varepsilon}}\,\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{3-2\varepsilon}\int\limits_{0}^{R}\frac{\left(R^2-z^2\right)^{\frac{3-2\varepsilon}{2}}}{|z|^{1-\varepsilon}}\,\mathrm{d}z=$$

$$=\left[Rt=z,R\mathrm{d}t=\mathrm{d}z\right]=\frac{4\pi}{3-2\varepsilon}\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(R^2-R^2t^2\right)^{\frac{3-2\varepsilon}{2}}}{R^{1-\varepsilon}t^{1-\varepsilon}}R\,\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{4\pi}{3-2\varepsilon}R^{3-\varepsilon}\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{3-2\varepsilon}{2}}}{t^{1-\varepsilon}}\,\mathrm{d}t=K\cdot R^{3-\varepsilon}=O\left(R^3\right)$$

תרגיל חשבו את

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2+w^2\le 1}e^{x^2+y^2-z^2-w^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}w$$

פתרון

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2+w^2\le 1} e^{x^2+y^2-z^2-w^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}w = \int\limits_{0\le x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2} \int\limits_{0\le z^2+w^2\le 1-x^2-y^2} e^{-z^2-w^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}w\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{0\le x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2} \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} 2\pi e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{0\le x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2} \int\limits_0^{1-x^2-y^2} \pi e^{-t}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{y} =$$

$$= \pi \int\limits_{0\le x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2} \left(-e^{-t}\right)\Big|_0^{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \pi \int\limits_{0\le x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2} \left(1-e^{x^2+y^2-1}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \pi \int\limits_{0\le x^2+y^2\le 1} e^{x^2+y^2} - \frac{e^{2x^2+2y^2}}{e}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \cdots = \pi^2\left(e-1\right)\frac{\pi^2}{2e}\left(e^2-1\right)$$