# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

3 בינואר 2017

## 1 משפט פוביני

**משפט 1.1** יהיו $A\subseteq\mathbb{R}^m$, $B\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבות, $f:A\times B\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ולכל $x\in A$ נסמן $f_x(y)=f(x,y)$. תהא $F:A\to\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים $F(x)\in\left[\left(\int_B f_x\right)_*,\left(\int_B f_x\right)^*\right]$. אזי

$$\int\limits_{A\times B} f=\int\limits_A F$$

**שימוש** אם $f$ רציפה בנוסף, או שלחילופין $f(x,\cdot),f(\cdot,y)$ אינטגרביליות, אזי

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\limits_B\left(\int\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

**תרגיל** הוכיחו כי אם יש כדור $B$ שחסום בגליל $S$, וקונוס $C$ שחסום בו גם, אז מתקיים

$$\nu(S):\nu(B):\nu(C)=3:2:1$$

**פתרון** עבור הקונוס, הגובה ירוץ בין $0$ לבין $h$, ובכל גובה $z$ הרדיוס הוא

$$r_z=r\left(1-\frac{z}{h}\right)$$

ולכן מתקיים

$$\nu(C)=\int\limits_0^h\pi r^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^2\mathrm{d}z=\pi r^2h\int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t=\frac{\pi hr^2}{3}$$

עבור הספירהת הגובה ירוץ בין $r$ לבין $-r$, ובגובה $z$ רדיוס החתך יהיה

$$r_z=\sqrt{r^2-z^2}$$

ולכן

$$\nu\left(B\right)=\int_{-r}^{r}\pi\left(r^{2}-z^{2}\right)\,\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi r^{3}$$

נציב $h=2r$ ונקבל

$$\nu\left(S\right):\nu\left(B\right):\nu\left(C\right)=2\pi r^{3}:\frac{4}{3}\pi r^{3}:\frac{2}{3}\pi r^{3}=3:2:1$$

**תרגיל** יהי $a>0$. מהו הניפחו של הסימפלקס

$$E_{a}^{n}=\left\{ \left(x_{1},\ldots,x_{n}\right)\mid x_{1},\ldots,x_{n}\geq0,x_{1}+\cdots+x_{n}\leq a\right\}$$

**פתרון** נוכיח באינדוקציה כי

$$E_{a}^{n}=\frac{a^{n}}{n!}$$

$T:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{n}$,

$$T\left(x\right)=\frac{1}{a}x$$

לפי הנלמד בכיתה מתקיים

$$\det T\int_{E_{a}^{n}}f=\int_{T\left(E_{a}^{n}\right)}f\circ T^{-1}$$

בוודאי $T\left(E_{a}^{n}\right)=E_{1}^{n}$ ולכן מספיק להניח כי $a=1$.
$0\leq x_{1}\leq1$, עבור $\left(x_{2},\ldots,x_{n}\right)$ כלשהם. לכל $x_{1}$ אפשרי נסתכל על החתך. מהו החתך? הוא $E_{1-x_{1}}^{n-1}$. לכן

$$\nu\left(E_{1}^{n}\right)=\int_{E_{1}^{n}}1=\int_{0}^{1}\left(\int_{E_{1-x_{1}}^{n-1}}1\,\mathrm{d}x_{2}\,\ldots\,\mathrm{d}x_{n}\right)\,\mathrm{d}x_{1}=$$

$$=\int_{0}^{1}\frac{\left(1-x_{1}\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!}\,\mathrm{d}x_{1}=\frac{1}{\left(n-1\right)!}\int_{0}^{1}t^{n-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}$$

**תרגיל** יהי $p>0$,

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}\left(\{x \mid |x|\leq 1\}\right)}\int\limits_{|x|\leq 1}|x|^{p}=?$$

**פתרון** נסמן

$$\mathbb{R}^{n+1}\supseteq E=\{(x,z)\mid 0\leq z\leq 1-|x|^{p}\}$$

אזי בהכרח

$$\nu\left(E\right)=\int\limits_{|x|\leq 1}\left(1-|x|^{p}\right)$$

נשתמש במשפט פוביני. $z$ יכול לנוע בין $0,1$. בהינתן $z$ שכזה, החתך מתואר על ידי $|x|^{p}\leq 1-z$ או $|x|\leq(1-z)^{\frac{1}{p}}$. כעת,

$$\nu\left(B_{n}\left(r\right)\right)=r^{n}\nu\left(B_{n}\left(1\right)\right)$$

כעת

$$\nu\left(E\right)=\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{|x|\leq(1-z)^{\frac{1}{p}}}1\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}z=\int\limits_{0}^{1}\nu\left(B_{n}\left(1\right)\right)\cdot(1-z)^{\frac{n}{p}}\,\mathrm{d}z=\nu\left(B_{n}\left(1\right)\right)\int\limits_{0}^{1}(1-z)^{\frac{n}{p}}\,\mathrm{d}z=$$

$$=\nu\left(B_{n}\left(1\right)\right)\cdot\int\limits_{0}^{1}t^{\frac{n}{p}}=\nu\left(B_{n}\left(1\right)\right)\frac{1}{\frac{n}{p}+1}=\nu\left(B_{n}\left(1\right)\right)\cdot\frac{p}{n+p}$$

בסך הכל,

$$\int\limits_{|x|\leq 1}\left(1-|x|^{p}\right)=\nu\left(B_{n}\left(1\right)\right)\cdot\frac{p}{n+p}=\nu\left(B_{n}\left(1\right)\right)-\int\limits_{|x|\leq 1}|x|^{p}$$

$$\frac{n}{n+p}=1-\frac{p}{n+p}=\frac{1}{\nu\left(B_{n}\left(1\right)\right)}\int\limits_{|x|\leq 1}|x|^{p}$$

ולכן סיימנו.

**תרגיל** יהיו $0<a<b$. חשבו את

$$I=\int\limits_{0}^{1}\frac{x^{b}-x^{a}}{\log x}\,\mathrm{d}x$$

**פתרון** נביט בפונקציה $x^y$ על הקוביה $[a,b] \times [0,1]$. מתקיים

$$\int\limits_{[0,1]\times[a,b]} x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left( \int\limits_a^b x^y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x^y}{\log x} \Big|_a^b \,\mathrm{d}x = I$$

וכמו כן

$$\int\limits_{[0,1]\times[a,b]} x^y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left( \int\limits_0^1 x^y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_a^b \frac{1}{y+1} \,\mathrm{d}y = \log\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$

וסיימנו.