חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

2 בנובמבר 2016

בתרגול הזה נפתור תרגילים שונים על החומר של חדו"א 2, לשם חזרה ומעבר.
הדבר העיקרי בו נדון בקורס הוא המרחב $\mathbb{R}^n$. במרחב הזה יש לנו את הנורמה האוקלידית:

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

נורמה זו מקיימת את תכונות הנורמה ובפרט את אי שוויון המשולש:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

כתיבה אלטרנטיבית שמדגישה מרחק:

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

הגדרה 0.1 סדרה $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ מתכנסת לגבול x אם מתקיים:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}. \forall n > N \ \ \ |x_n - x| < \varepsilon$$

הגדרה 0.2 בהנתן $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, נגיד שהיא מתכנסת לגבול y בנקודה x_0, ולסמן

$$y = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

אם מתקיים

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0. \, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

הגדרה 0.3 f רציפה בנקודה x_0 אם מתקיים

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$$

טענה 0.4 f רציפה בנקודה x_0 אם ורק אם לכל סדרה x_n המקיימת $x_n\to x_0$ מתקיים $f\left(x_n\right)\to f\left(x_0\right)$.

זו טענה פשוטה יחסית שהוכחנו בקורסי עבר.

תרגיל תהי $f:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ שקבועה על קרנות, כלומר קיימת $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 2π מחזורית, עבורה מתקיים

$$f\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right)=h\left(\theta\right)$$

נניח כי h רציפה. הראו כי קיים הגבול

$$\lim_{x\to 0} f\left(x\right)$$

אם ורק אם h היא פונקציה קבועה.

פתרון נניח כי h קבועה. נובע כי f קבועה, ולכן וודאי שהגבול קיים, ושווה לאותו קבוע.
כעת נניח כי הגבול קיים, ונסמנו L. ניקח סדרה $\{x_n\}$ על קרן עם ארגומנט θ, כך שמתקיים $x_n\to 0$. כעת מתקיים

$$L\xleftarrow{n\to\infty} f\left(x_n\right)=h\left(\theta\right)$$

ולכן לכל θ מתקיים $h\left(\theta\right)=L$.

0.1 הטופולוגיה של $\mathbb{R}^n$

הגדרה 0.5 קבוצה $U\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת פתוחה אם לכל $x\in U$ קיים $r>0$ המקיים

$$B_r\left(x\right)\coloneqq\{y\mid |y-x|<r\}\subseteq U$$

הגדרה 0.6 קבוצה $F\subseteq\mathbb{R}^n$ נקראת סגורה אם $\mathbb{R}^n\backslash F$ היא פתוחה. באופן שקול, לכל סדרה $\{x_n\}\in F$ שמתכנסת לגבול כלשהו x, מתקיים $x\in F$.

תזכורת $\{x_m\}=\left\{\left(x_m^{(1)},\ldots,x_m^{(n)}\right)\right\}$ מתכנסת לגבול $x=\left(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}\right)$ אם ורק אם לכל i מתקיים

$$x_n^{(i)}\xrightarrow{n\to\infty}x^{(i)}$$

תרגיל תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה, ותהי $f : E \to \mathbb{R}^m$ העתקה רציפה. הראו שהגרף

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

הוא קבוצה סגורה.

פתרון תהא $\{(x_n, f(x_n))\} \subseteq \Gamma_f$ סדרה שמתכנסת לנקודה (x, y). אזי גם x_n מתכנסת לנקודה x, ומשום שנתון כי E סגורה נקבל כי $x \in E$. כיוון שהפונקציה f רציפה, נקבל כי $f(x_n)$ מתכנסת לגבול $f(x)$. הנחנו כי $f(x_n)$ מתכנסת לגבול y, וכעת מיחידות הגבול, $(x, y) = (x, f(x)) \in \Gamma_f$.

תרגיל תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה. הראו כי ישנה $A \subseteq \mathbb{R}^m$ סגורה והעתקה רציפה $f : A \to U$ שהיא על.

כדי לפתור את התרגיל הזה ננצל למה, שתהיה בשיעורי הבית:

למה 0.7 ניתן להציג את U כאיחוד בן מניה של כדורים סגורים.

פתרון נכתוב

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

כאשר $B_n \subseteq U$ קבוצה סגורה. נגדיר

$$A \coloneqq \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i \times \{i\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

נראה כי A סגורה. תהי $\{x_m\} \subseteq A$, אזי

$$x_m^{(n+1)} \in \mathbb{N}$$

נניח כי $x_m \to x$. אזי בפרט $x_m^{(n+1)} \to x^{(n+1)}$, אבל אלה טבעיים, ולכן עבור m גדול מספיק, $x_m^{(n+1)} = k$, כאשר $k \in \mathbb{N}$ קבוע כלשהו. אזי, עבור m גדול מספיק,

$$\left(x_m^{(1)}, \ldots, x_m^{(n)}\right) \in B_k$$

ולכן

$$\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right) \in B_k$$

ולכן $x \in B_k \times \{k\} \subseteq A$.
לבסוף, נביט $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי

$$f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$$

ברור לפי ההגדרה כי $f(A) = U$, וכמובן שלכל $x \in U$, x שייך לכדור כלשהו, ואז יש נקודה בתוך A שתוביל אל x.